I appello 4/2/15 — Geometria per Ingegneria Medica
Prof. F. Bracci — A.A. 2014-15

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ________________________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2.

(a) Se $\{v_1, v_2\}$ è una base di V e $v = 2v_1 + v_2$ e $w = v_1 - v_2$, allora $\{v, w\}$ è una base di V.
(b) Ogni insieme composto da 2 vettori linearmente indipendenti di V forma una base di V.
(c) Esistono $v_1, v_2 \in V$ tali che $\{v_1, v_2\}$ sono linearmente indipendenti ma non generano V.
(d) Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ è un sistema di generatori di V allora $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente indipendenti.

Q2) Sia A una matrice $n \times n$, $n \geq 1$. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $v_\alpha = (\alpha, 0, \ldots, 0)$ un vettore $n \times 1$. Sia

$$B_\alpha := \begin{pmatrix} {}^t v_\alpha & A \\ 0 & 0 \ldots 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Se $\alpha \neq 0$ la matrice B_α è invertibile.
(b) Il rango di B_α è sempre uguale al rango di A.
(c) Se A è invertibile e $\alpha \neq 0$ allora B_α è invertibile.
(d) Il determinante di B_α non dipende da α.

Q3) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 2$ dotato di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare.

(a) Se W è un sottospazio vettoriale di V di dimensione $n - 1$ tale che $T(w) \in W$ per ogni $w \in W$ allora esiste un autovettore v di T tale che $\langle v, w \rangle = 0$ per ogni $w \in W$.
(b) Se il nucleo di T ha dimensione > 0 allora per ogni autovettore v di T risulta $\langle v, w \rangle = 0$ per ogni $w \in \ker T$.
(c) Se $\ker T$ ha dimensione 0 allora esiste una base ortonormale di V formata da autovettori di T.
(d) Se il polinomio caratteristico di T è $p_T(\lambda) = (\lambda - 1)^n$ allora la dimensione di $\mathsf{Im}\, T$ è n.

Q4) Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione $n \geq 3$ e siano $v, w, u \in V$ tre vettori non nulli.

(a) Se lo spazio generato da v e w ha dimensione 2 e u appartiene allo spazio ortogonale a $\mathrm{span}\{v, w\}$ allora u, v, w sono linearmente indipendenti.
(b) Se v, w, u sono linearmente indipendenti allora u appartiene allo spazio ortogonale a $\mathrm{span}\{v, w\}$.
(c) Se v, w, u sono linearmente indipendenti allora esiste una base ortonormale $\{e_1, \ldots, e_n\}$ di V tale che u è multiplo di e_1, v è multiplo di e_2 e w è multiplo di e_3.
(d) Se v, w sono linearmente dipendenti, allora $\langle v + u, w + u\rangle = 0$.

Q5) Siano $1 \leq n < m$. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $b \in \mathbb{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n + 1)$ ottenuta aggiungendo la colonna b alla matrice A.

(a) Se il rango di A è pari a n, esistono soluzioni al sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$.
(b) Se il rango della matrice A' è massimo, il sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette esattamente una soluzione.
(c) Se il rango di A' è n, allora il rango di A è n.
(d) Se il sistema sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette una soluzione, allora il rango di A è uguale al rango di A'.

Q6) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z). Sia r la retta $x = y = 0$ e sia s una retta distinta da r e passante per $(0, 0, 1)$.

(a) r è ortogonale al piano $x + y = 0$.
(b) r è parallela al piano $x + y = 2$.
(c) Non esistono piani che contengono r e s.
(d) s è ortogonale ad ogni piano che contiene r.

Q7) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia r la retta parallela alla retta $x + y = 0$ e passante per $(1, 1)$.

(a) La distanza di r da $(0, 0)$ è 2.
(b) l'equazione parametrica di r è $x = 1 + \lambda, y = 1 + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
(c) Detto A il punto di intersezione di r con l'asse delle x e B il punto di intersezione di r con l'asse delle y, l'area del triangolo formato dai punti $A, B, (0, 0)$ è 2.
(d) r è tangente al vettore $(3, -3)$.

Q8) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia $\mathcal{C}_\alpha : x^2 + \alpha y^2 + 2xy - 2 = 0$ una famiglia di coniche al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Per $\alpha = 0$ la conica è affinemente equivalente ad una ellisse.
(b) Per $\alpha = 2$ la conica è affinemente equivalente ad una ellisse.
(c) La conica è sempre degenere.
(d) Non esiste alcun valore $\alpha \in \mathbb{R}$ per il quale la conica è affinemente equivalente ad una parabola.

Soluzioni:

Q1: a, b.
Q2: d.
Q3: d.
Q4: a.
Q5: d.
Q6: b.
Q7: c,d.
Q8: b, d.

PARTE II: Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale $\mathcal{R}$ con coordinate (x, y, z). Sia r la retta tangente al vettore $(1, 0, -1)$ e passante per il punto $(1, 1, 0)$. Sia π il piano $x + 2y - z = 1$.

(1) Trovare l'equazione cartesiana e quella parametrica della retta r.
(2) Dire, motivando la risposta, se esiste un piano ortogonale al piano π che contiene la retta r, e nel caso esista, determinare l'equazione parametrica di tale piano.
(3) Trovare la distanza del piano $\pi' : x + 2y - z = 0$ dal piano π.
(4) Trovare l'equazione cartesiana della retta ottenuta da r dopo il ribaltamento rispetto al piano π.

Soluzione:

(1) r ha equazione parametrica $x = 1 + \lambda, y = 1, z = -\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. L'equazione cartesiana è $x + z = 1, y = 1$.
(2) π è ortogonale al vettore $(1, 2, -1)$. Il piano cercato deve dunque essere tangente ai vettori $(1, 2, -1)$ e $(1, 0, -1)$ e passare per un punto della retta r. Dunque tale piano ha equazione parametrica $x = 1 + \lambda + \mu, y = 1 + 2\lambda, z = -\lambda - \mu$ al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
(3) I due piani sono paralleli, pertanto la loro distanza è positiva. Il vettore $n := (1, 2, -1)$ è ortogonale ai due piani, dunque, preso qualunque $P \in \pi$ e $Q \in \pi'$ il modulo della proiezione ortogonale del vettore $P - Q$ sullo spazio generato da n è la distanza di π da π'. Ovvero, scelto $P = (1, 0, 0)$ e $Q = (0, 0, 0)$, risulta

$$\mathrm{dist}(\pi, \pi') = \|\langle P - Q, \frac{n}{\|n\|}\rangle\| = \|\langle(1, 0, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}})\rangle\| = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Alternativamente, si può prendere un punto di π', ad esempio $Q = (0, 0, 0)$, la retta ortogonale a π' passante per Q, data da $x = \lambda, y = 2\lambda, z = -\lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, trovarne l'intersezione con il piano π, ovvero $Q' = (\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, -\frac{1}{6})$ e calcolare la distanza tra Q e Q', ovvero $\|Q - Q'\| = \frac{1}{\sqrt{6}}$.
(4) Scegliamo un sistema di riferimento affine ortonormale $\mathcal{R}' = \{P; (u_1, u_2, u_3)\}$ con coordinate (x', y', z') tali che π sia dato da $z' = 0$. Tale sistema di riferimento si ottiene prendendo P un qualunque punto di π, ad esempio $P = (1, 0, 0)$, u_3 un vettore di norma 1 ortogonale a π, ad esempio $u_3 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}})$ e completando ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, ad esempio $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $u_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})$. Le equazioni di cambiamento di coordinate sono dunque

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z' + 1 \\ y &= \frac{-1}{\sqrt{3}}y' + \frac{2}{\sqrt{6}}z' \\ z &= \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{3}}y' - \frac{1}{\sqrt{6}}z' \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{\sqrt{3}}z - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ z' &= \frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{2}{\sqrt{6}}y - \frac{1}{\sqrt{6}}z - \frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

In tali coordinate la retta r ha equazioni $\sqrt{2}x' = 1, -\frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{2}{\sqrt{6}}z' = 1$. Il ribaltamento rispetto al piano $z' = 0$ si scrive come $(x', y', z') \mapsto (x', y', -z')$. Pertanto la retta r ribaltata nel nuovo sistema di riferimento ha equazione $x' = 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}y' - \frac{2}{\sqrt{6}}z' = 1$. Utilizzando le formule di cambiamento di coordinate si ottiene quindi l'equazione cartesiana della retta r ribaltata, data da $x + z = 1, -2x - y + 2z = 1$.