I appello 5/2/13 — Geometria per Ingegneria Medica
Prof. F. Bracci — A.A. 2012-13

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ______________________________

Corso di Laurea: (se diverso da Ing. Medica) ______________________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n.

(a) Ogni insieme formato da n vettori di V genera un sottospazio vettoriale di V di dimensione n.
(b) Comunque dati $n+1$ vettori di V, questi sono tra loro linearmente dipendenti.
(c) Esistono n vettori $v_1, \ldots, v_n \in V$ tali che ogni vettore $v \in V$ è combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$.
(d) Dati comunque n vettori $v_1, \ldots, v_n \in V$, ogni vettore $v \in V$ si esprime in modo unico come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n \in V$.

Q2) Si consideri la seguente matrice, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice A_α è sempre invertibile.
(b) L'inversa di A_α, quando esiste, ha determinante pari a $-1/\alpha$.
(c) La matrice A_α non può essere la matrice associata ad un operatore auto-aggiunto per nessun valore di α.
(d) La matrice A_α è ortogonale per $\alpha = 1$.

Q3) Siano V, W due spazi vettoriali metrici della stessa dimensione n. Sia $T : V \to W$ un operatore lineare.

(a) Il nucleo di T ha dimensione 1 se e solo se lo spazio ortogonale all'immagine di T in W ha dimensione 1.
(b) T può essere auto-aggiunto.
(c) T è iniettivo se e solo se non è suriettivo.
(d) L'immagine di T è ortogonale al nucleo di T.

Q4) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale metrico e siano $v, w \in V$ due vettori non nulli.

(a) Se v, w sono linearmente indipendenti allora $\langle v, w \rangle = 0$.
(b) Se $\langle v, w \rangle = 0$ allora v, w sono linearmente indipendenti.
(c) Se $\langle v, w \rangle = 0$ allora $v + w$ e $v - w$ sono ortogonali.
(d) La proiezione ortogonale di v sullo spazio generato da w ha modulo minore o uguale al modulo di v.

Q5) Siano A, B, C matrici $n \times n$.

(a) ${}^t(A + B) \cdot {}^tC = C \cdot ({}^tB + {}^tA)$
(b) Se A, B, C sono invertibili, allora $A \cdot B \cdot {}^tC$ è invertibile.
(c) Se A è invertibile e $A \cdot B = C$, allora B è invertibile se e solo se C lo è.
(d) $A \cdot (B + C) = A \cdot C + A \cdot B$.

Q6) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione n e sia $L : V \to V$ un operatore lineare.

(a) L è diagonalizzabile se e solo se è auto-aggiunto rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
(b) Se esiste una base ortonormale di V formata da autovettori di L allora L è auto-aggiunto rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
(c) Se L ha n autovalori distinti allora è diagonalizzabile.
(d) Se L ha n autovalori distinti allora è auto-aggiunto rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Q7) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia $\mathcal{C} := \{(x, y) : x^2 - 2xy + 2x - 1 = 0\}$.

(a) $\mathcal{C}$ è una conica a centro non degenere.
(b) $\mathcal{C}$ è affinemente equivalente ad una ellisse.
(c) $\mathcal{C}$ è affinemente equivalente ad una iperbole.
(d) $\mathcal{C}$ è metricamente equivalente ad una circonferenza.

Q8) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z). Sia r la retta intersezione dei piani $x - y = 1$ e $x - 2z = -2$.

(a) r contiene il punto $(0, -1, 1)$.
(b) r è parallela al piano $ax + by + cz + d = 0$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $a - b = 0, a - 2c = 0$.
(c) r è ortogonale al piano $ax + by + cz + d = 0$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $a - b = 0, a - 2c = 0$.
(d) r interseca ogni retta che contiene il punto $(1, 1, 1)$.

Q9) Nello spazio affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia r la retta passante per $(0, 1)$ e tangente al vettore $(1, 0)$.

(a) r è parallela alla retta $y = 0$.
(b) l'equazione cartesiana di r è $x = 0, y = 1$.
(c) r interseca ogni retta passante per $(0, 0)$.
(d) Lo spazio tangente ad r è dato da $y = 0$.

Q10) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione 4 e $W \subset V$ un sottospazio di dimensione 2 e denotiamo con $p_W : V \to V$ la proiezione ortogonale su W.

(a) $\ker p_W = W$.
(b) $p_W \circ p_W = \mathsf{id}$ (dove $\mathsf{id} : V \to V$ è definita tramite $\mathsf{id}(v) = v$).
(c) $p_W \circ p_W = p_W$.
(d) Il nucleo di p_W ha dimensione 0.

Soluzioni:

Q1: b, c
Q2: b, d
Q3: a
Q4: b, d
Q5: b, c, d
Q6: b, c
Q7: a, c
Q8: a, c
Q9: a, d
Q10: c

PARTE II: Risolvere i seguenti problemi, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

P1) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sia $T_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito tramite

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}.$$

(1) Dire per quali valori di α, β l'operatore $T_{\alpha,\beta}$ è invertibile.
(2) Al variare di α, β, trovare autovalori e autovettori di $T_{\alpha,\beta}$ e dire quando $T_{\alpha,\beta}$ è diagonalizzabile.

P2) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale $\mathcal{R}$ con coordinate $(x, y, z)_{\mathcal{R}}$. Sia $O' = (-1, 0, 1)_{\mathcal{R}}$ e siano $v_1 = (-1, 0, 1)_{\mathcal{R}}$ e $v_2 = (1, 0, 1)_{\mathcal{R}}$.

(1) Determinare l'equazione cartesiana e quella parametrica del piano π passante per O' e tangente ai vettori v_1, v_2.
(2) Determinare un sistema di riferimento affine ortonormale $\mathcal{R}'$ di coordinate $(x', y', z')_{\mathcal{R}'}$ in cui il piano π si dato da $z' = 0$. Si determini poi le coordinate in $\mathcal{R}'$ del punto $(0, 1, 0)_{\mathcal{R}}$.
(3) Determinare nel sistema di riferimento $\mathcal{R}'$ l'equazione cartesiana della retta r ortogonale a π e passante per il punto $(0, 1, 0)_{\mathcal{R}}$.

Soluzioni:

P1) La matrice associata a $T_{\alpha,\beta}$ nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è data da

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Essendo una matrice triangolare superiore, gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale, ovvero $\alpha, 1, -1$ e il determinante è il loro prodotto, ovvero $\det A = -\alpha$. Poiché A (e pertanto $T_{\alpha,\beta}$) è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$, ne segue che $T_{\alpha,\beta}$ è invertibile se e solo se $\alpha \neq 0$.

Studiamo adesso la diagonalizzazione. Abbiamo tre casi: $\alpha \neq -1, 1$, $\alpha = 1$ oppure $\alpha = -1$. Nel primo caso ci sono 3 autovalori distinti (ed in particolare A—e dunque $T_{\alpha,\beta}$—è diagonalizzabile). Nel secondo caso ci sono due autovalori distinti, 1 con molteplicità algebrica 2 e -1 con molteplicità algebrica 1. Nel terzo caso ci sono due autovalori distinti, 1 con molteplicità algebrica 1 e -1 con molteplicità algebrica 2.

Studiamo il primo caso: $\alpha \neq \pm 1$. Allora, A possiede tre autovalori distinti $1, -1, \alpha$ e dunque è diagonalizzabile per ogni valore di β. Per trovare l'autospazio relativo all'autovalore 1, ovvero V_1, risolviamo il sistema $A\underline{x} = \underline{x}$. Si ha

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ -x_3 = x_3 \end{cases} \tag{0.1}$$

da cui, ricordando che $\alpha \neq 1$, si ottiene $x_1 = -\frac{\beta}{\alpha-1}x_2, x_3 = 0$. Pertanto V_1 è generato dal vettore $\begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\alpha-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Similmente, per trovare un generatore di V_{-1} si risolve il sistema $A\underline{x} = -\underline{x}$ e, tenendo presente che abbiamo $\alpha \neq -1$, si ottiene che V_{-1} è generato da $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Infine, per trovare un generatore di V_α si risolve il sistema $A\underline{x} = \alpha\underline{x}$ e si ottiene che V_α è generato da $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Studiamo adesso il caso $\alpha = 1$. Per prima cosa si risolve il sistema $A\underline{x} = -\underline{x}$ e, come in precedenza, poiché $\alpha \neq -1$, si ottiene che V_{-1} è generato da $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si esamina poi l'autospazio relativo a 1, sapendo che $\alpha = 1$. Dal sistema (0.1) si ottiene $\beta x_2 = 0, x_3 = 0$. Da cui, se $\beta \neq 0$ si ha che V_1 è generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. In tal caso la molteplicità geometrica di 1 è 1, quindi strettamente inferiore alla sua molteplicità algebrica e pertanto A—e dunque $T_{\alpha,\beta}$ per $\alpha = 1, \beta \neq 0$—non è diagonalizzabile.

Se invece $\beta = 0$, allora V_1 è generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e dunque in tal caso la molteplicità geometrica di 1 è 2 e A, e dunque $T_{\alpha,\beta}$ (per $\alpha = 1, \beta = 0$) è diagonalizzabile.

Esaminiamo ora l'ultimo caso, ovvero $\alpha = -1$. Ragionando come in precedenza, si ottiene che V_1 è generato da $\begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\alpha-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mentre per V_{-1}, si risolve il sistema $A\underline{x} = -\underline{x}$ con $\alpha = -1$, ovvero

$$\begin{cases} -x_1 + \beta x_2 = -x_1 \\ x_2 = -x_2 \\ -x_3 = -x_3 \end{cases}$$

da cui si ottiene $x_2 = 0$. Pertanto una base di V_{-1} è data da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. In tal caso, la molteplicità geometrica di -1 è 2 e coincide con la molteplicità algebrica, pertanto A, e dunque $T_{\alpha,\beta}$ per $\alpha = -1$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, è diagonalizzabile.

P2) L'equazione parametrica del piano π è data da

$$\begin{cases} x = -1 - \lambda + \mu \\ y = 0 \\ z = 1 + \lambda + \mu, \end{cases}$$

al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Da qui si vede subito che l'equazione cartesiana di π è $y = 0$.

Pertanto, un cambiamento di riferimento affine ortonormale che porta $y = 0$ in $z' = 0$ è dato da

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = z \\ z' = y \end{cases} \tag{0.2}$$

(alternativamente si poteva osservare che i vettori v_1, v_2 sono ortogonali tra loro, considerare $u := v_1 \wedge v_2$ che è un vettore normale al piano π e prendere come sistema di riferimento quello dato da $\{O; \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{u}{\|u\|}\}$)

Dal cambiamento (0.2), sostituendo (x, y, z) con $(0, 1, 0)$, si ottiene subito che $(0, 1, 0)_{\mathcal{R}} = (0, 0, 1)_{\mathcal{R}'}$.

Infine, la retta ortogonale al piano $z' = 0$ ha spazio tangente generato da $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e poichè passa per il punto $(0, 1, 0)_{\mathcal{R}} = (0, 0, 1)_{\mathcal{R}'}$, la sua equazione parametrica è

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = 1 + \lambda \end{cases}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. L'equazione cartesiana è pertanto $x' = y' = 0$.