I appello 26/6/17 — Geometria per Ingegneria Civile e Ambientale
Prof. F. Bracci — A.A. 2016-17

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ________________________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature*. Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3.

(a) Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ è un sistema di generatori di V, allora $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente indipendenti.
(b) Se $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sono un sistema di generatori di V, allora $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono una base di V.
(c) Se $\{v_1, v_2\}$ generano un sottospazio di V di dimensione 2 allora v_1, v_2 sono linearmente indipendenti.
(d) Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di V, allora per ogni $v \in V$, $v \neq \underline{0}$, esistono due elementi di $\{v_1, v_2, v_3\}$ che completano v ad una base di V.

Q2) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sia

$$A_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice $A_{\alpha,\beta}$ è invertibile per ogni valore di α, β.
(b) Il rango di $A_{\alpha,\beta}$ è 2 per $\alpha = 1, \beta = 0$.
(c) Per $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ la matrice $A_{\alpha,\beta}$ è diagonalizzabile.
(d) Per $\beta = 0$ e $\alpha \neq 0$ la matrice $A_{\alpha,\beta}$ è diagonalizzabile.

Q3) Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 2$ dotato di un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare.

(a) Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V. 0 è un autovalore di L se e solo se $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ sono linearmente dipendenti.
(b) Se T è auto-aggiunto allora 0 è un autovalore di T.
(c) Se esistono due basi $\mathcal{V} := \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{W} := \{w_1, \ldots, w_n\}$ ortonormali di V tali che la matrice associata a T nelle basi $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ è simmetrica, allora T è autoaggiunto.
(d) Supponiamo che T sia auto-aggiunto, 2 sia un autovalore di T e l'autospazio V_2 relativo a 2 abbia dimensione $n-1$. Se $v \in V$ è tale che $\langle v, w\rangle = 0$ per ogni $w \in V_2$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ tale che $T(v) = \lambda v$.

Q4) Sia A una matrice 2×2 con autovalori reali.

(a) Se la traccia di A è strettamente positiva allora A è invertibile.
(b) Se $\det A < 0$ allora la traccia di A è < 0.
(c) Se $\det A > 0$ allora la traccia di A non può essere nulla.
(d) Se $\det A = 0$ e la traccia di A è nulla allora A è la matrice nulla.

Q5) Siano $1 \leq m < n$. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $b \in \mathbb{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n+1)$ ottenuta aggiungendo la colonna b alla matrice A.

(a) Se il rango di A' è m, esistono soluzioni al sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$.
(b) Se il rango della matrice A è minore del rango di A', allora il sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette esattamente una soluzione.
(c) Se il rango di A è m, allora il sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette soluzione.
(d) Se il sistema sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette soluzione, allora ammette infinite soluzioni diverse.

Q6) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z). Sia r l'insieme definito da $x = 1, y = \lambda + 1, z = \lambda + 1$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) r è un piano affine di equazione $x = 1$.
(b) r è una retta affine parallela alla retta $x = 0, x + y - z = 0$.
(c) Il punto $(1, -1, 1)$ appartiene ad r.
(d) r è ortogonale al piano $x = 1$

Q7) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia r la retta parallela alla retta $x - y = 0$ e passante per $(1, -1)$.

(a) La distanza di r da $(0, 0)$ è $\sqrt{2}$.
(b) l'equazione parametrica di r è $x = 1 + \lambda, y = -1 - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
(c) Siano A, B due punti distinti di r e sia $C_\mu = (\mu, \mu)$ al variare di $\mu \in \mathbb{R}$. L'area del triangolo di vertici A, B, C_μ non dipende da μ.
(d) r è ortogonale alla retta passante per $(0, 0)$ e $(0, 1)$.

Q8) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia $\mathcal{C}_{\alpha,\beta} : \alpha x^2 + \beta y^2 + 2x + 1 = 0$ una famiglia di insiemi al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Per $\alpha > 0, \beta < 0$, $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ è una conica affinemente equivalente ad una iperbole.
(b) Per $\alpha = \beta = 1$, $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ è una conica affinemente equivalente ad una ellisse.
(c) Non esistono valori di α, β per cui $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ è una conica affinemente equivalente ad una parabola.
(d) Per $\alpha = 0$ e per ogni valore di β, $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ è una conica degenere.

PARTE II: Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale $\mathcal{R}$ con coordinate (x, y, z). Sia π il piano ortogonale al vettore $(1, 1, -1)$ e passante per il punto $(-2, 1, -1)$. Sia $\mathcal{J}$ l'insieme formato dalle rette ortogonali a π.

(1) Trovare l'equazione cartesiana e quella parametrica del piano π.
(2) Determinare l'equazione cartesiana della retta $r \in \mathcal{J}$ che passa per il punto $P_0 := (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.
(3) Trovare un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate (x', y', z') per cui la retta r abbia equazione $x' = 0, y' = 0$. Dire, motivando la risposta, se è possibile trovare tale sistema di riferimento affine ortonormale in modo che π abbia equazione $\alpha x' + z' = \beta$ per qualche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq 0$.
(4) Sia P_1 il punto di intersezione di r con π. Determinare il luogo di punti Q di π per cui l'area del triangolo di vertici P_0, P_1 e Q è uguale a $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Soluzioni:
Q1) a, c, d
Q2) a
Q3) a, d
Q4) c
Q5) c, d
Q6) b
Q7) a, c
Q8) a

Parte II

(1) L'equazione cartesiana di π è della forma $x + y - z = c$ per $c \in \mathbb{R}$. Per determinare c imponiamo la condizione di passaggio per $(-2, 1, -1)$, da cui troviamo $c = 0$, ovvero π ha equazione cartesiana $x + y - z = 0$. Una equazione parametrica di π è data ponendo ad esempio $x = \lambda, y = \mu, z = \lambda + \mu$, al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(2) Ogni retta ortogonale a π deve essere tangente al vettore $(1, 1, -1)$, imponendo il passaggio per P_0, otteniamo l'equazione parametrica $x = \frac{2}{3} + \lambda, y = \frac{2}{3} + \lambda, z = -\frac{2}{3} - \lambda$, per $\lambda \in \mathbb{R}$. Da cui si ottiene l'equazione cartesiana di r, $x = y, z = -x$.

(3) Basta prendere un sistema di riferimento affine ortonormale $\mathcal{R}' = \{P_0; v_1, v_2, v_3\}$ dove $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ tale che v_3 genera lo spazio tangente a r. Ad esempio, $v_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$. Per trovare v_1, v_2 si può utilizzare il procedimento di Gram-Schmidt, oppure, si vede subito che il vettore $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ha norma 1 ed è ortogonale a v_3. Si prende allora $v_2 = v_3 \wedge v_1 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$.

D'altra parte, non è possibile trovare un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate (x', y', z') in modo che r sia $x' = y' = 0$ e π sia della forma $\alpha x' + z' = \beta$ per qualche $\alpha \neq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Infatti, π e r sono ortogonali e l'ortogonalità viene preservata nei sistemi di riferimento affine ortonormali, mentre $x' = y' = 0$ e $\alpha x' + z' = \beta$ non sono ortogonali se $\alpha \neq 0$.

(4) $P_1 = \pi \cap r = (0, 0, 0)$ (infatti π e r passano per l'origine). Poiché r è ortogonale a π, se Q è un qualunque punto di π, i vettori $Q - P_1$ e $P_0 - P_1$ sono ortogonali. Ovvero, il triangolo di vertici P_0, P_1, Q è rettangolo. La sua area è dunque data da $\frac{1}{2}\|P_0 - P_1\|\|Q - P_1\|$. Risulta $\|P_0 - P_1\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Pertanto i punti Q di π tali che il triangolo di vertici P_0, P_1, Q ha area $\frac{1}{\sqrt{3}}$ è composto dai punti $Q \in \pi$ tali che $\|Q - P_1\| = 1$, ovvero tale luogo di punti è un cerchio in π centrato nell'origine di raggio 1.