1. Siano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ i vettori
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.
   (b) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $2\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.
   (c) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

2. Per ogni $n \geq 1$ calcolare il determinante della matrice $n \times n$ data da
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Calcolare i polinomi caratteristici delle matrici
$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Calcolare gli autovalori $\lambda \in \mathbf{R}$ delle seguenti matrici. Determinare gli autospazi corrispondenti.
$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(d)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

5. Sia $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ la moltiplicazione per una certa matrice invertibile A.
   (a) Dimostrare che gli autovalori di A sono non nulli.
   (b) Dimostrare che se λ è autovalore di A, allora λ^{-1} è autovalore di A^{-1}.

6. Sia A una matrice $n \times n$ che soddisfa $A^2 = 0$. Sia $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ la moltiplicazione per A.
   (a) Determinare gli autovalori di f.
   (b) Calcolare $\mathrm{Tr}(A)$.
   (c) Dimostrare che $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$.
   (d) Dimostrare che $\dim \ker(f) \geq n/2$.
   (e) Dare un esempio di una matrice $B \neq 0$ con $B^2 = 0$.

7. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice
$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$