

1. Siano

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3;$$

- (a) Far vedere che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sono vettori indipendenti.
- (b) Completarli ad una base di \mathbf{R}^3 .
- (c) Esibire un complemento di $\text{Span}\{\mathbf{v}_1\}$ e di $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

2. Esibire un complemento del sottospazio $W \subset \mathbf{R}^4$ dato da

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

3. Calcolare i seguenti prodotti di matrici

- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (b) $(1 \ 2 \ 3 \ 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- (e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 2 \ 3 \ 4)$.
- (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Calcolare i prodotti AB e BA dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. Quali applicazioni sono lineari?

- (a) $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ data da $g(x) = |x|$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.
- (b) $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ data da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

- (c) $h : \mathbf{R}[X] \rightarrow \mathbf{R}[X]$ data da $h(p(X)) = (p(X) - p(0))/X$ per $p(X)$ un polinomio in $\mathbf{R}[X]$.

6. Calcolare le dimensioni di $\ker(f)$ ed $\text{im}(f)$ per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ data da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$