Geometria. 1^o Appello. 3 Maggio 2004, 11:00–13:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, *accompagnandole con spiegazioni* chiare ed essenziali. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Sia $V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 - x_2 + x_4 = 0\}$ e sia $W = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \} \subset \mathbf{R}^4$.
   Determinare $\dim(V \cap W)$ e $\dim(V + W)$.

Usando il metodo di Gauss, si fa vedere che vale $V = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$. Siccome i tre vettori sono indipendenti, abbiamo che $\dim(V) = 3$. Sempre con il metodo di Gauss, si fa vedere che i tre vettori che generano W *non* sono indipendenti, ma che W è lo span di due vettori indipendenti, per esempio $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Abbiamo quindi che $\dim(W) = 2$. Infine, siccome abbiamo che

$$V + W = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \},$$

troviamo, sempre usando il metodo di Gauss, che vale $V + W = \mathbf{R}^4$. Concludiamo che $\dim(V + W) = 4$ e, usando la formula di Grassmann, che $\dim(V \cap W) = 3 + 2 - 4 = 1$.

2. (**Solo per studenti di ingegneria Medica**). Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{100}.

Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ la moltiplicazione per A. Allora la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è A. Usiamo adesso una base di autovettori di f. Il polinomio caratteristico di f è uguale a $(-1-\lambda)(5-\lambda) + 8 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$. Un autovettore di autovalore $\lambda = 1$ è $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Un autovettore di autovalore $\lambda = 3$ è $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Rispetto alla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ la matrice rappresentativa di f è uguale a $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Adesso consideriamo i due diagrammi commutativi

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^3 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathbf{R}^3 \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ \mathbf{R}^3 \arrow[r, "f"] & \mathbf{R}^3 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{R}^3 \arrow[r, "A'"] \arrow[d, "B"'] & \mathbf{R}^3 \arrow[d, "B"] \\ \mathbf{R}^3 \arrow[r, "A"] & \mathbf{R}^3 \end{tikzcd}$$

Nella parte superiore del diagramma usiamo la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ di autovettori di f. Nella parte inferiore usiamo invece la base canonica di $\mathbf{R}^2$. Le colonne della matrice B sono formate dalle coordinate degli autovettori di f calcolate rispetto alla base canonica. Abbiamo che $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

e $BA' = AB$. Nello stesso modo abbiamo due diagrammi commutatitivi per l'applicazione f^{100}.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \xrightarrow{f^{100}} & \mathbf{R}^3 \\ \text{id}\downarrow & & \downarrow\text{id} \\ \mathbf{R}^3 & \xrightarrow{f^{100}} & \mathbf{R}^3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \xrightarrow{A'^{100}} & \mathbf{R}^3 \\ B\downarrow & & \downarrow B \\ \mathbf{R}^3 & \xrightarrow{A^{100}} & \mathbf{R}^3 \end{array}$$

e quindi $BA'^{100} = A^{100}B$. Siccome la matrice inversa di B è uguale a $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, abbiamo che

$$A^{100} = BA'^{100}B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3^{100} & 2-2\cdot 3^{100} \\ -1+3^{100} & -1+2\cdot 3^{100} \end{pmatrix}.$$

3. Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data da $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

   (a) Calcolare $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) Calcolare autovalori e autospazi di f.
   (c) Determinare, se esiste, l'applicazione inversa f^{-1}.

   (a) Siccome $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se e soltanto se $x+y+z=0$, il nucleo di f è uguale al sottospazio $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x+y+z=0\} = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$. L'immagine di f è lo span delle colonne della matrice che definisce f. Vale dunque $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

   (b) Il polinomio caratteristico è $\lambda^3 - 6\lambda^2$ e gli autovalori di f sono pertanto $\lambda = 0$ e $\lambda = 6$. L'autospazio di autovalore $\lambda = 0$ è uguale a $\ker(f)$ ed è già stato determinato sopra. L'autospazio di autovalore $\lambda = 6$ è uguale a $\mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

   (c) Siccome $\ker(f)$ non è zero, f non è iniettiva e non può essere invertibile.

4. Sia $\ell \subset \mathbf{R}^2$ la retta di equazione cartesiana $x_1 - x_2 = 0$ e sia S_ℓ la riflessione rispetto a ℓ. Sia R_ϕ la rotazione di angolo $\phi = \frac{-\pi}{2}$.

   (a) Scrivere le formule S_ℓ e per R_ϕ
   (b) Sia r la retta di equazione cartesiana $x_1 + x_2 = 0$. Scrivere un equazione cartesiana per l'immagine di r mediante $T = S_\ell \circ R_\phi$.

   (a) La retta ℓ passa per l'origine e forma un angolo $\psi = \frac{\pi}{4}$, con l'asse $x_2 = 0$ e quindi

$$S_\ell\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & \cos 2\psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

   Per quanto riguarda la rotazione abbiamo:

$$R_{-\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos -\frac{\pi}{2} & -\sin -\frac{\pi}{2} \\ \sin -\frac{\pi}{2} & \cos -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

   (b) La retta r è perpendicolare ad ℓ quindi se la ruotiamo di un angolo di $-\frac{\pi}{2}$ (cioè se calcoliamo la sua immagine mediante $R_{\frac{\pi}{2}}$) otteniamo la retta ℓ. Poichè la retta ℓ viene mandata in se stessa da S_ℓ abbiamo che l'immagine di r attraverso $T = S_\ell \circ R_\phi$ coincide con la retta ℓ e quindi una sua equazione cartesiana è $x_1 - x_2 = 0$.