

## Dispense di Geometria. Capitolo 2.

### 4. Geometria di $\mathbf{R}^3$ .

Questo paragrafo è molto simile al paragrafo 1: tratta infatti delle proprietà geometriche elementari dello spazio  $\mathbf{R}^3$ . Per assegnare delle *coordinate* nello spazio, fissiamo innanzitutto un punto  $\mathbf{0}$ , che chiamiamo *l'origine*. Scegliamo poi tre rette perpendicolari che si incontrano in  $\mathbf{0}$ : due rette “orizzontali” come assi delle  $x_1$  e delle  $x_2$ , e la terza “verticale” come asse delle  $x_3$ . Fissiamo su di esse un verso ed un’unità di misura. Adesso, ad un arbitrario punto  $P$  dello spazio associamo una terna di numeri reali  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ , che indicano rispettivamente le proiezioni di  $P$  sugli assi delle  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ .

Fig.1. Lo spazio  $\mathbf{R}^3$

Le coordinate  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  individuano il punto  $P$  in modo unico. Si possono identificare quindi i punti  $P$  dello spazio con le terne  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ :

$$P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ad esempio, i punti sull’asse delle  $x_1$  sono quelli che soddisfano  $x_2 = x_3 = 0$ , i punti sull’asse delle  $x_2$  quelli che soddisfano  $x_1 = x_3 = 0$  e i punti sull’asse delle  $x_3$  quelli che soddisfano  $x_1 = x_2 = 0$ .

L'origine  $\mathbf{0}$  è il punto  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . L'insieme delle terne ordinate  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  si chiama “spazio cartesiano” e si indica con  $\mathbf{R}^3$ :

$$\mathbf{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \right\}.$$

Nello spazio  $\mathbf{R}^3$ , insieme agli assi coordinati, si considerano anche i piani coordinati: sono i tre piani ortogonali che si intersecano nell'origine, ognuno dei quali contiene due dei 3 assi coordinati. Essi sono: il piano  $(x_1, x_2)$  i cui punti soddisfano  $x_3 = 0$ , il piano  $(x_2, x_3)$  i cui punti soddisfano  $x_1 = 0$  ed il piano  $(x_1, x_3)$  i cui punti soddisfano  $x_2 = 0$ .

Fig.2. I piani coordinati in  $\mathbf{R}^3$

Come nel caso del piano, indicheremo in seguito con  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  anche il *vettore*  $\mathbf{x}$  uscente dall'origine e di estremo il punto  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ .

Fig.3. Il vettore  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ .

Il vettore  $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  di lunghezza zero, si chiama *vettore nullo*. Per semplicità di notazione,

scriveremo spesso  $\mathbf{x}$  sottintendendo  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ; similmente scriveremo  $\mathbf{y}$  per  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ , etc ...

**Definizione.** Siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  due vettori in  $\mathbf{R}^3$ . Allora la *somma*  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  di  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  è il vettore dato da

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}.$$

Il *vettore opposto* del vettore  $\mathbf{x}$  è il vettore

$$-\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}.$$

La *differenza*  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  dei vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  è il vettore  $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ x_3 - y_3 \end{pmatrix}$ .

**Definizione.** Sia  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Il *prodotto* di  $\mathbf{x}$  per  $\lambda$  è il vettore dato da

$$\lambda \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}.$$

Come nel piano, anche nello spazio la somma tra vettori ha un'interpretazione geometrica. Osserviamo che due vettori qualunque  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  in  $\mathbf{R}^3$  sono contenuti in un piano  $\pi$  passante per  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ . Il vettore somma  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  si trova applicando la regola del parallelogramma ai vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  sul piano  $\pi$ . Per costruzione,  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  è contenuto nel piano  $\pi$ . Resta solo da verificare che le coordinate di  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  così ottenute sono effettivamente

$$\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}.$$

Anche in  $\mathbf{R}^3$ , il vettore differenza  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  è parallelo alla retta passante per  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ ; la lunghezza di  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  è uguale alla distanza fra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

Fig.4. La somma  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ , la differenza  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ .

**Osservazione.** La costruzione appena discussa è utile perché riconduce la somma di vettori nello spazio ad una somma di vettori sul piano. Ci permette inoltre di definire l'angolo  $\vartheta$  fra due vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  dello spazio, come l'angolo da essi formato nel piano  $\pi$  che li contiene. Nel caso in cui  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  sono uno multiplo dell'altro, il piano  $\pi$  non è unico ed i vettori  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  stanno tutti sulla stessa retta. In questo caso, l'angolo fra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  è  $\vartheta = 0$ .

Fig.5 L'angolo  $\vartheta$  fra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

La somma fra vettori gode delle seguenti proprietà:

**Proposizione 4.1.**

(i) (Proprietà associativa della somma) Per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^3$

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z});$$

(ii) (Proprietà commutativa) Per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x};$$

(iii) (Proprietà associativa del prodotto) Per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$  e  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$

$$\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x};$$

(iv) (Proprietà distributiva) Per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$  e  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}, \\ (\lambda + \mu)\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}. \end{aligned}$$

**Dimostrazione.** Anche in questo caso, le proprietà (i), (ii), (iii) e (iv) sono semplici conseguenze delle analoghe proprietà dei numeri reali.

**Definizione.** (Prodotto scalare.) Dati due vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  in  $\mathbf{R}^3$  il *prodotto scalare*  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  è il numero reale dato da

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà

**Proposizione 4.2.**

(i) (Proprietà commutativa) Per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x};$$

(ii) (Proprietà distributiva) Per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^3$

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z};$$

(iii) (Omogeneità) Per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$  ed ogni  $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\lambda\mathbf{y});$$

(iv) (Positività) Per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0,$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \quad \text{se e soltanto se} \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

**Dimostrazione.** La dimostrazione è molto simile a quella della Prop.1.2 ed è lasciata al lettore.

**Definizione.** La norma  $\|\mathbf{x}\|$  di un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$  è definita da

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Per il Teorema di Pitagora, la norma del vettore  $\mathbf{x}$  è uguale alla lunghezza del segmento congiungente  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ . Equivalentemente, la norma di  $\mathbf{x}$  è la distanza del punto  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  dall'origine  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Fig.6. Il Teorema di Pitagora in  $\mathbf{R}^3$ .

Analogamente, dalla Fig.4 vediamo che  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  è la distanza fra i punti  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ . Usando la norma, diamo un'interpretazione geometrica del prodotto scalare.

**Proposizione 4.3.** Siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  due vettori in  $\mathbf{R}^3$ .

(i) Allora

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \cos \varphi$$

dove  $\varphi$  è l'angolo fra i vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

(ii) I vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  sono perpendicolari se e soltanto se  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ .

**Dimostrazione.** Sia  $\pi$  un piano che passa per  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ . Consideriamo in  $\pi$  il triangolo di vertici i punti  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ . Dalla Fig.4, vediamo che i lati del triangolo hanno lunghezze  $\|\mathbf{x}\|$ ,  $\|\mathbf{y}\|$  e  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ . Applicando la regola del coseno troviamo

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\varphi.$$

Dalla definizione stessa della norma abbiamo

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\varphi$$

e quindi

$$-2x_1y_1 - 2x_2y_2 - 2x_3y_3 = -2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\varphi$$

come richiesto. Per la parte (ii), osserviamo che  $\cos\varphi = 0$  se e soltanto se  $\varphi = \pm\pi/2$ , cioè se e soltanto se  $\varphi$  è un angolo retto.

**Corollario 4.4.** (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  vettori in  $\mathbf{R}^3$ . Allora

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|.$$

**Dimostrazione.** Questo segue dal fatto che  $|\cos\varphi| \leq 1$ . (Vedi l'Eserc.1.B).

**Proposizione 4.5.** Siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  vettori in  $\mathbf{R}^3$ . Allora

(i) (Disuguaglianza triangolare)

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|;$$

(ii) Per ogni  $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|.$$

**Dimostrazione.** (i) Sia  $\pi$  un piano che passa per  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ . In  $\pi$  c'è il triangolo di vertici  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ . Poiché i lati hanno lunghezze  $\|\mathbf{x}\|$ ,  $\|\mathbf{y}\|$  e  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$ , la disuguaglianza triangolare in  $\mathbf{R}^3$  segue dalla disuguaglianza triangolare nel piano. Una seconda dimostrazione dello stesso fatto si può ottenere anche usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz del Cor.4.4:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + (x_3 + y_3)^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2. \end{aligned}$$

Poiché  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$  e  $\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  sono numeri non negativi, possiamo estrarne le radici quadrate ottenendo la disuguaglianza cercata.

(ii) Direttamente dalla definizione della norma troviamo

$$\|\lambda\mathbf{x}\|^2 = (\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + (\lambda x_3)^2 = \lambda^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \lambda^2\|\mathbf{x}\|^2.$$

Estraendo le radici quadrate, otteniamo

$$\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$$

come richiesto.

Come applicazione del prodotto scalare, calcoliamo le proiezioni ortogonali di un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$  su una retta  $l$  o su un piano  $\beta$ , passanti per l'origine.

**Proposizione 4.6.** *Sia  $\mathbf{x}$  un vettore in  $\mathbf{R}^3$ .*

(i) *La proiezione ortogonale  $\pi(\mathbf{x})$  di  $\mathbf{x}$  sulla retta  $l$  passante per l'origine e parallela al vettore  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  è data da*

$$\pi(\mathbf{x}) = c\mathbf{y}, \quad \text{ove } c = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2};$$

(ii) *La proiezione ortogonale  $\pi(\mathbf{x})$  di  $\mathbf{x}$  sul piano  $\beta$  passante per l'origine di equazione  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$  è data da*

$$\pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \lambda\mathbf{n}, \quad \text{ove } \lambda = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}.$$

**Dimostrazione.** (i) La dimostrazione è del tutto simile a quella della Proposizione 1.6 ed è lasciata al lettore.

(ii) Sia  $\pi(\mathbf{x})$  la proiezione ortogonale di  $\mathbf{x}$  sul piano  $\beta$ . Allora  $\mathbf{x} - \pi(\mathbf{x})$  è un vettore perpendicolare a  $\beta$  e dunque soddisfa

$$\mathbf{x} - \pi(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{n}$$

per un opportuno scalare  $\lambda$ . Poiché  $\pi(\mathbf{x})$  appartiene a  $\beta$  vale  $\mathbf{n} \cdot \pi(\mathbf{x}) = 0$ , da cui si ricava  $\lambda\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$  e quindi

$$\lambda = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}$$

come richiesto.

Fig.7. La proiezione del vettore  $\mathbf{x}$  sul piano  $\beta$ .

Introduciamo adesso il *prodotto vettoriale* in  $\mathbf{R}^3$ : si noti che il *prodotto vettoriale* non è definito nel piano  $\mathbf{R}^2$ , né in  $\mathbf{R}^n$  per  $n > 3$ . È una nozione che *esiste solo in  $\mathbf{R}^3$* . Il *prodotto vettoriale* è un'applicazione che ad una coppia di vettori  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$  associa un terzo vettore  $\mathbf{x} \times \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ .

**Definizione.** Siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ . Il *prodotto vettoriale*  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  di  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  è il vettore di  $\mathbf{R}^3$  definito da

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

**Proposizione 4.7.** *Siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ . Il prodotto vettoriale  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  gode delle seguenti proprietà:*

(i)

$$\mathbf{y} \times \mathbf{x} = -\mathbf{x} \times \mathbf{y};$$

(ii) Il vettore  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  è perpendicolare sia ad  $\mathbf{x}$  che a  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0,$$

$$\mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0;$$

(iii) La norma di  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  soddisfa

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\sin \varphi,$$

dove  $\varphi$  è l'angolo fra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

**Dimostrazione.** (i) Direttamente dalla definizione, abbiamo

$$\mathbf{y} \times \mathbf{x} = \begin{pmatrix} y_2x_3 - y_3x_2 \\ y_3x_1 - y_1x_3 \\ y_1x_2 - y_2x_1 \end{pmatrix} = -\mathbf{x} \times \mathbf{y}.$$

Per dimostrare (ii), calcoliamo

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \\ &= x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1) = 0. \end{aligned}$$

Similmente troviamo  $\mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0$ .

Per la parte (iii) abbiamo

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 \sin^2 \varphi &= \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2(1 - \cos^2 \varphi) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \\ &= x_1^2y_2^2 + x_1^2y_3^2 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_3^2 + x_3^2y_1^2 + x_3^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_1x_3y_1y_3 - 2x_2x_3y_2y_3 \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)^2 \\ &= \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Estraendo le radici quadrate, troviamo l'uguaglianza cercata. Questo conclude la dimostrazione della proposizione.

**Proposizione 4.8.** Il parallelepipedo di spigoli i vettori  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$  ha volume  $V$  dato da

$$\begin{aligned} V &= |x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - x_1z_2y_3 - y_1x_2z_3 - z_1y_2x_3| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \right|. \end{aligned}$$



**Dimostrazione.** Il volume  $V$  del parallelepipedo di spigoli  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$  è uguale all'area del parallelogramma di vertici  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  moltiplicata per l'altezza. L'altezza è uguale alla lunghezza della proiezione del vettore  $\mathbf{z}$  sulla retta che passa per  $\mathbf{0}$  e  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ .

Fig.8. Il parallelepipedo di spigoli  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$ .

Per la Prop.1.7, l'area del parallelogramma è uguale a  $\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\sin\varphi$ , ove  $\varphi$  è l'angolo fra i vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , e la lunghezza della proiezione di  $\mathbf{z}$  sulla retta per  $\mathbf{0}$  e  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  è uguale a  $\|\mathbf{z}\|\cos\vartheta$ , ove  $\vartheta$  è l'angolo fra i vettori  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ . Il volume  $V$  è quindi dato da

$$\begin{aligned} V &= \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\sin\varphi\|\mathbf{z}\|\cos\vartheta \\ &= \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|\|\mathbf{z}\|\cos\vartheta \\ &= \|\mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y})\| \\ &= |z_1(x_2y_3 - x_3y_2) + z_2(x_3y_1 - x_1y_3) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1)|. \end{aligned}$$

Osserviamo infine che l'espressione  $z_1(x_2y_3 - x_3y_2) + z_2(x_3y_1 - x_1y_3) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1)$  coincide col determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix},$$

e ciò completa la dimostrazione della Proposizione.

**Definizione.** L'*orientazione*  $\text{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  di tre vettori  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^3$  è il segno del determinante

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Si dice che  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  sono orientati *positivamente* se  $\text{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) > 0$ .

Per esempio, i vettori  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$  sono orientati positivamente perchè

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1.$$

Scambiare due vettori cambia il segno dell'orientazione:

$$\text{Or}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = -\text{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Geometricamente, tre vettori  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$  sono orientati positivamente se possono essere identificati rispettivamente con il medio, il pollice e l'indice della mano destra. Altrimenti sono orientati negativamente e possono essere identificati rispettivamente con il medio, il pollice e l'indice della mano sinistra.

Mano sinistra;  $\text{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = -1$ .

Mano destra;  $\text{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = +1$ .

Fig.9. L'orientazione.

**Osservazione.** I vettori  $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}$  e  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}\}$  formano una terna di vettori orientata positivamente.

**Esercizi.**

(4.A) Siano  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  due vettori in  $\mathbf{R}^3$ .

- (i) Calcolare  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x} + 3\mathbf{y}$  e  $-2\mathbf{x} + \mathbf{y}$ .
- (ii) Calcolare le lunghezze di questi vettori.

(4.B) Siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  i vettori dell'Eserc.4.A.

- (i) Calcolare i prodotti scalari  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$  e anche  $\mathbf{x} \cdot (5\mathbf{x} + 7\mathbf{y})$ .
- (ii) Calcolare il coseno dell'angolo fra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .
- (iii) Calcolare il coseno dell'angolo fra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ .

(4.C) Sia  $\mathbf{x}$  il vettore dell'Eserc.4.A.

- (i) Trovare un vettore  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  tale che  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$ .
- (ii) Trovare un vettore  $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$  tale che

$$\begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = 0, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0. \end{cases}$$

(4.D) Sia  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$  un vettore non nullo. Sia  $\lambda = \|\mathbf{v}\|$ .

- (i) Calcolare la lunghezza di  $\frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$ .
- (ii) Trovare un vettore parallelo a  $\mathbf{v}$  che abbia lunghezza  $1/\lambda$ .

(4.E) Siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  due vettori in  $\mathbf{R}^3$ . Sia

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} (x_1 + y_1)/2 \\ (x_2 + y_2)/2 \\ (x_3 + y_3)/2 \end{pmatrix}.$$

- (i) Calcolare le distanze  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ ,  $\|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|$  e  $\|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|$ .
- (ii) Far vedere che  $\mathbf{v}$  è il punto medio fra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

(4.F) Siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  i due vettori dell'Eserc.4.A.

- (i) Calcolare  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ .

- (ii) Calcolare  $\mathbf{x} \times (-\mathbf{y})$ .
- (iii) Calcolare l'area del triangolo di vertici  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

(4.G) Siano  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

- (i) Trovare un vettore  $\mathbf{v}$  perpendicolare sia a  $\mathbf{x}$  che a  $\mathbf{y}$ .
- (ii) Trovare un vettore come nella parte (i), di lunghezza 1.

(4.H) Siano  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$  i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (i) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$ .
- (ii) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori  $2\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$ .
- (iii) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$ .
- (iv) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori  $\mathbf{x} + 5\mathbf{y} + 7\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$ .

(4.I) Siano  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$  i vettori in  $\mathbf{R}^3$  dati da

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (i) Calcolare le lunghezze di  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$  e gli angoli fra  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$ .
- (ii) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori  $\mathbf{x} + 5\mathbf{y} + 7\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$ .

(4.J) Siano  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- (i) Calcolare i vettori  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z}$  ed  $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z})$ .
- (ii) Calcolare  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$  ed  $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z})$ .

(4.K) Siano  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$  i vettori dell'Eserc.4.H.

- (i) Calcolare l'orientazione  $\text{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ .
- (ii) Calcolare l'orientazione  $\text{Or}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x})$ .
- (iii) Calcolare l'orientazione  $\text{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y})$ .

(4.L) Siano  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_8 \in \mathbf{R}^3$  gli otto punti in  $\mathbf{R}^3$  dati da

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{x}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{x}_3 &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{x}_4 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}_5 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, & \mathbf{x}_6 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, & \mathbf{x}_7 &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, & \mathbf{x}_8 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (i) Far vedere che  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  e  $\mathbf{x}_4$  sono i vertici di un parallelogramma.
- (ii) Far vedere che  $\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_5 = \mathbf{x}_{i+4}$  per ogni  $i, 1 \leq i \leq 4$ .
- (iii) Far vedere che  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_8$  formano i vertici di un parallelepipedo. Calcolarne il volume.

(4.M) Siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^3$  e supponiamo che  $\text{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = +1$ .

- (i) Far vedere che i vettori  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$  si possono mettere in ordine in *sei* modi diversi:  $\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}$  oppure  $\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$  ecc.
- (ii) Per tutti i sei modi calcolare l'orientazione:  $\text{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y})$ ,  $\text{Or}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  ... ecc.

(4.N) Siano  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$  numeri non nulli che soddisfano  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ . Consideriamo i seguenti vettori in  $\mathbf{R}^3$ :

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \beta\gamma \\ \gamma\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \beta\gamma \\ \gamma\alpha \\ \alpha\beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \gamma\alpha \\ \alpha\beta \\ \beta\gamma \end{pmatrix}.$$

- (i) Calcolare gli angoli fra i vettori  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{r}$ .
- (ii) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{r}$ .

## 5. Rette e piani in $\mathbf{R}^3$ ; sfere.

In questo paragrafo studiamo le rette, i piani e le sfere in  $\mathbf{R}^3$ . Ci sono due modi per descrivere piani e rette in  $\mathbf{R}^3$ : mediante *equazioni cartesiane* oppure mediante *equazioni parametriche*. Cominciamo con le equazioni parametriche delle rette. La situazione è molto simile a quella in  $\mathbf{R}^2$ . Un'equazione parametrica di una retta in  $\mathbf{R}^3$  ha la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + tv_1 \\ p_2 + tv_2 \\ p_3 + tv_3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R},$$

ossia

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbf{R},$$

ponendo come al solito  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ . Il vettore  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  è un *vettore parallelo* alla retta e il punto  $\mathbf{p}$  è un punto sulla retta. Al variare del parametro  $t \in \mathbf{R}$  vengono descritti tutti i punti della retta: il punto  $\mathbf{p}$  corrisponde a  $t = 0$ . Ad esempio, al punto  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ed al vettore  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  corrisponde la retta

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Fig.10. La retta  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Per  $t = 0$ ,  $t = 1$  e  $t = -1/3$  troviamo rispettivamente i punti della retta

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Come nel caso di  $\mathbf{R}^2$  due equazioni parametriche distinte possono descrivere la stessa retta: se  $\mathbf{p}'$  è un altro punto sulla retta e  $\mathbf{v}'$  è un vettore parallelo a  $\mathbf{v}$ , le equazioni

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbf{R} \quad \mathbf{x} = \mathbf{p}' + s\mathbf{v}', \quad s \in \mathbf{R}$$

descrivono la stessa retta.

Similmente si hanno equazioni parametriche per i piani in  $\mathbf{R}^3$ . Un'equazione parametrica di un piano in  $\mathbf{R}^3$  ha la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + tv_1 + sw_1 \\ p_2 + tv_2 + sw_2 \\ p_3 + tv_3 + sw_3 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbf{R},$$

ossia

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbf{R},$$

ponendo come al solito  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ . Il punto  $\mathbf{p}$  è un punto del piano, i vettori  $\mathbf{v} \neq 0$  e  $\mathbf{w} \neq 0$  sono *vettori paralleli* al piano. Per ottenere effettivamente un piano è necessario che  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ , oltre ad essere non nulli, *non* siano uno multiplo dell'altro, cioè  $\mathbf{v} \neq \lambda\mathbf{w}$ . Al variare dei parametri  $t$  ed  $s \in \mathbf{R}$  vengono descritti tutti i punti del piano: il punto  $\mathbf{p}$  corrisponde a  $t = s = 0$ . Ad esempio, per  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  troviamo il piano

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbf{R}.$$

Fig.11. Il piano  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Assegnando ai parametri i valori  $t = s = 0$ , oppure  $t = 1, s = 0$ , oppure  $t = -1/3, s = -2$  si trovano rispettivamente i punti del piano

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Anche in questo caso, due equazioni parametriche distinte possono descrivere lo stesso piano: se  $\mathbf{p}'$  è un altro punto del piano e  $\mathbf{v}'$ ,  $\mathbf{w}'$  sono vettori tali che  $\text{span}\{\mathbf{v}', \mathbf{w}'\} = \text{span}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ , allora

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}' + t'\mathbf{v}' + s'\mathbf{w}', \quad t', s' \in \mathbf{R}$$

è un'altra equazione dello stesso piano.

Le rette ed i piani nello spazio si possono anche rappresentare mediante *equazioni cartesiane*. I punti  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$  che soddisfano un'equazione lineare

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d, \quad (*)$$

dove  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$  ed  $a, b, c$  non sono tutti nulli, formano un piano. Questo si vede facilmente "risolvendo il sistema lineare" di una sola equazione in tre incognite (\*). Le soluzioni dipendono da due parametri liberi. Per esempio, risolvendo l'equazione  $x_2 + 2x_3 = 4$  possiamo scegliere come parametri liberi  $x_1$  e  $x_3$ . Se chiamiamo  $x_1 = s$  ed  $x_3 = t$ , allora  $x_2 = 4 - 2x_3 = 4 - 2t$  e troviamo il piano di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 4 - 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'equazione cartesiana di un piano non è unica. Se  $\lambda$  è un numero reale non nullo, le equazioni

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \quad \text{e} \quad \lambda ax_1 + \lambda bx_2 + \lambda cx_3 = \lambda d$$

definiscono lo stesso piano.

**Definizione.** Un vettore *normale* ad un piano è un vettore  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  che è perpendicolare al piano.

**Proposizione 5.1.** Sia  $\pi$  il piano di equazione cartesiana

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d.$$

Allora, il vettore  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  è un vettore normale a  $\pi$ .

**Dimostrazione.** Notiamo che  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  non è zero perchè  $a, b, c$  non sono tutti nulli. Controlliamo che  $\mathbf{n}$  è perpendicolare al piano. Dati due punti distinti  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  del piano, il vettore  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  è parallelo al piano. Calcolando

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ x_3 - y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (x_1 - y_1)a + (x_2 - y_2)b + (x_3 - y_3)c \\ &= (ax_1 + bx_2 + cx_3) - (ay_1 + by_2 + cy_3) = d - d = 0 \end{aligned}$$

troviamo che, per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \pi$ , il prodotto scalare  $(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}$  è zero. Poiché tutti i vettori paralleli al piano  $\pi$  sono di questa forma, si ha che  $\mathbf{n}$  è perpendicolare a  $\pi$ , come richiesto.

Fig.12.  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  è parallelo al piano.

**Osservazione.** Se

$$ax + by + cz = d \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbf{R}$$

sono rispettivamente un'equazione cartesiana ed un'equazione parametrica dello stesso piano, allora il vettore normale  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  è perpendicolare ai vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ .

I punti di  $\mathbf{R}^3$  che soddisfano un sistema lineare di *due* equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = d' \end{cases} \quad (**)$$

ove le terne  $a, b, c$  e  $a', b', c'$  sono entrambe non nulle, sono precisamente i punti contenuti sia nel piano di equazione  $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$  che nel piano di equazione  $a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = d'$ .

Quando l'intersezione dei due piani è una retta, si dice che le equazioni del sistema sono *equazioni cartesiane* per la retta. Per esempio, i punti  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$  tali che

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

formano una retta in  $\mathbf{R}^3$ . Poiché il sistema è già "a scala", ponendo  $x_3 = s$  come parametro libero, ricaviamo  $x_2 = (4 - x_3)/2 = 2 - s/2$  ed  $x_1 = 1 - 3s + 2(2 - s/2) = 5 - 4s$ . Troviamo così la retta

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 - 4s \\ 2 - s/2 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Come si intuisce facilmente, le equazioni cartesiane di una retta non sono uniche: ci sono infatti infinite coppie di piani che si incontrano in una data retta.

**Proposizione 5.2.** *Siano*

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = d' \end{cases}$$

*equazioni cartesiane di una retta  $r$  in  $\mathbf{R}^3$ . Allora i vettori  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  ed  $\mathbf{n}' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  generano un piano  $\nu$  perpendicolare ad  $r$ .*

**Dimostrazione.** Poiché la retta  $r$  è contenuta sia nel piano di equazione  $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$  che in quello di equazione  $a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = d'$ , essa è ortogonale sia ad  $\mathbf{n}$  che a  $\mathbf{n}'$ . Sia  $\mathbf{x}$  un generico punto di  $r$ . Poiché

$$\mathbf{x} \cdot (t\mathbf{n} + s\mathbf{n}') = t\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} + s\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}' = 0, \quad \text{per ogni } s, t \in \mathbf{R}$$

si ha che la retta  $r$  è perpendicolare a  $\nu$  come richiesto.

**Osservazione.** Come conseguenza della Proposizione 5.2, il prodotto vettoriale  $\mathbf{n} \times \mathbf{n}'$  definisce un vettore parallelo ad  $r$ .

Abbiamo visto i due modi per descrivere rette e piani in  $\mathbf{R}^3$ . Abbiamo spiegato come passare da equazioni cartesiane ad equazioni parametriche. Vediamo adesso, mediante esempi espliciti, come passare da equazioni parametriche ad equazioni cartesiane.

**Esempio 5.3.** Sia  $l$  la retta data da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

Per trovare delle equazioni cartesiane di  $l$ , eliminiamo il parametro  $s$  dal sistema

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2s \\ x_2 = -1 + s \\ x_3 = -2s. \end{cases}$$

Il parametro  $s$  si può eliminare in diversi modi. Ricavando ad esempio  $s$  dalla seconda equazione, troviamo  $s = x_2 + 1$ , che sostituito nelle altre due equazioni, ci dà:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2(x_2 + 1) = 2x_2 + 3 \\ x_3 = -2(x_2 + 1) = -2x_2 - 2. \end{cases}$$

Queste sono delle equazioni cartesiane della retta  $l$ .

**Esempio 5.4.** Sia  $\pi$  il piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbf{R}.$$

Per scrivere un'equazione cartesiana

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

di  $\pi$  abbiamo bisogno innanzitutto di un vettore  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  ortogonale a  $\pi$  ed, in particolare,

ortogonale a  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Le coordinate di  $\mathbf{n}$  devono dunque soddisfare le condizioni

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2a + b - 2c = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = b + 2c = 0, \end{aligned}$$



ossia il sistema lineare

$$\begin{cases} 2a + b - 2c = 0 \\ b + 2c = 0. \end{cases}$$

Poiché il sistema è a scala, possiamo ricavare  $b = -2c$  ed  $a = (2c - b)/2 = (2c + 2c)/2 = 2c$  in funzione del parametro libero  $c$ , cosicché

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ -2c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Ponendo ad esempio  $c = 1$ , troviamo  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Determiniamo infine il termine noto  $d$  sos-

tituendo nell'equazione un punto del piano. Usando per esempio il punto  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  dell'equazione parametrica, troviamo  $2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 0 = d$  e quindi  $d = 4$ . L'equazione cercata è

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4.$$

**Osservazione.** Un altro modo per ottenere il vettore  $\mathbf{n}$  è quello di calcolare il prodotto vettoriale dei vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$

$$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Esempio 5.5.** (*piano per 3 punti*) Come determinare il piano  $\pi$  passante per tre punti dati in  $\mathbf{R}^3$ ? C'è da osservare che il piano è unico se e solo se i tre punti non stanno sulla stessa retta. Siano dati, per esempio,

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Allora i vettori  $\mathbf{v} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$  e  $\mathbf{w} = \mathbf{p} - \mathbf{r}$  dati da

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti e paralleli al piano  $\pi$  cercato. Un'equazione parametrica di  $\pi$  è data dunque da  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}$ , per  $s, t \in \mathbf{R}$ , ossia

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbf{R}.$$

**Esempio 5.6** (*Intersezioni*)

1. Siano dati due piani  $\pi_1$  e  $\pi_2$ . Come calcolare l'intersezione  $\pi_1 \cap \pi_2$ ? Se  $\pi_1$  e  $\pi_2$  sono dati mediante equazioni cartesiane, c'è da risolvere un sistema lineare di due equazioni nelle tre incognite  $x_1, x_2, x_3$ . Se l'intersezione di due piani non è una retta, ci sono due possibilità:

- *i due piani sono paralleli*. Questo corrisponde al caso in cui il sistema corrispondente non ha soluzioni. Ad esempio, il sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

è incompatibile e i due piani  $x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$  e  $2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3$  sono paralleli.

- *I due piani coincidono*. Questo corrisponde al caso in cui le equazioni del sistema corrispondente hanno esattamente le stesse soluzioni, dipendenti da due parametri liberi. Per esempio, il sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

è equivalente al sistema “a scala”

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni hanno  $x_2$  ed  $x_3$  come parametri liberi. Se uno dei due piani è dato in forma parametrica, ci si può ricondurre al caso di due equazioni cartesiane con i metodi sopra esposti. Per esempio, sia  $\pi_1$  il piano di equazione

$$x_1 + 2x_3 = 2$$

e sia  $\pi_2$  il piano dato da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbf{R}.$$

Allora un vettore normale a  $\pi_2$  è dato da  $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , per cui un’equazione cartesiana di  $\pi_2$  è

$$-2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1.$$

Per calcolare l’intersezione dei due piani, risolviamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

Sommando due volte la prima equazione alla seconda, troviamo il sistema “a scala”

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 2 \\ 2x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

Ponendo  $x_3 = s$  come parametro libero, ricaviamo  $x_2 = (3 - 5s)/2 = 3/2 - 5s/2$  ed  $x_1 = 2 - 2s$ . In conclusione, l’intersezione è una retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 - 2s \\ 3/2 - 5/2 \cdot s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -5/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

2. Sia  $\pi$  un piano in  $\mathbf{R}^3$  dato in forma cartesiana e sia  $l$  una retta in forma parametrica. La loro intersezione consiste nei punti della retta  $l$  che soddisfano l'equazione di  $\pi$ . Per esempio, sia  $\pi$  il piano di equazione  $2x_1 - 3x_3 = 1$  e sia  $l$  la retta data da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

Allora un punto  $\mathbf{x}$  della retta  $l$  è contenuto in  $\pi$  se e soltanto se

$$2(1 + 2s) + 0(1 + 5) - 3(-1 + s) = 1,$$

cioè se e solo se  $s = -4$ . Questo valore di  $s$  corrisponde all'unico punto di intersezione  $\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ .

Può succedere che la retta sia parallela a  $\pi$  oppure contenuta in  $\pi$ . Nel primo caso nessun punto della retta soddisfa l'equazione del piano, nel secondo la soddisfano tutti.

3. Siano  $l$  ed  $m$  due rette in  $\mathbf{R}^3$ . Ci sono tre possibilità: le rette si intersecano in un punto, le rette coincidono, le rette sono parallele oppure sono "sghembe". Due rette sono sghembe se non hanno punti in comune e non sono parallele.

Fig.13. Due rette sghembe.

Consideriamo, ad esempio, le rette  $l$  ed  $m$  di equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Le rette  $l$  ed  $m$  non sono parallele. Per trovare l'intersezione di  $l$  ed  $m$  poniamo

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e risolviamo il sistema lineare di tre equazioni nelle incognite  $s$  e  $t$ . Si verifica facilmente che il sistema non ha soluzioni e le due rette sono sghembe.

Lasciamo al lettore il compito di trovare metodi per calcolare l'intersezione di due rette  $l$  ed  $m$  quando non sono date entrambe in forma parametrica. Il principio è sempre quello di trovare i punti che soddisfano sia le equazioni di  $l$  che quelle di  $m$ . Alla fine ci si riconduce sempre a risolvere un sistema lineare.

**Teorema 5.7.** Sia  $\mathbf{p}$  un punto in  $\mathbf{R}^3$  e sia  $\pi$  il piano di equazione

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0.$$

Allora, la distanza di  $\mathbf{p}$  dal piano  $\pi$  è data da

$$\frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

**Dimostrazione.** Poiché  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  è un vettore normale a  $\pi$ , la retta  $l$  perpendicolare a  $\pi$  e passante per  $\mathbf{p}$  ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

Per calcolare il punto di intersezione  $\mathbf{q}$  fra  $l$  e  $\pi$ , sostituiamo il punto generico di  $l$  nell'equazione del piano

$$a(p_1 + sa) + b(p_2 + sb) + c(p_3 + sc) + d = 0$$

e ricaviamo  $s$

$$s = -\frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Il punto  $\mathbf{q}$  corrispondente è:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - \frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

La distanza fra  $\mathbf{p}$  e il piano  $\pi$  è uguale alla distanza fra  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$

$$d(\mathbf{p}, \pi) = d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \left\| \frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\| = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

come richiesto.

**Esempio 5.8.** (*distanza fra due rette sghembe*) Come calcolare la distanza fra due rette sghembe  $l$  ed  $m$  in  $\mathbf{R}^3$ ? Un metodo è quello di calcolare un'equazione cartesiana di un piano  $\pi$  che *passa* per una delle due rette ed è *parallelo* all'altra. Dopodiché la distanza  $d(l, m)$  è uguale alla distanza fra  $\pi$  e un qualsiasi punto dell'altra retta. Per esempio, siano  $l$  ed  $m$  le rette date da

$$l: \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad m: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

Per trovare un'equazione parametrica del piano  $\pi$  contenente  $m$  e parallelo ad  $l$ , calcoliamo prima un'equazione parametrica di  $l$ :

$$l: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Il piano  $\pi$  ha vettore normale  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  e contiene il punto  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; dunque un'equazione cartesiana di  $\pi$  è data da  $-x_1 + 2x_2 = 2$ . Prendiamo infine il punto  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  sulla retta  $l$ . Allora la distanza  $d(l, m)$  è uguale alla distanza fra  $\pi$  e  $\mathbf{p}$ , cioè

$$d(l, m) = d(\mathbf{p}, \pi) = \frac{|-1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Fig.14. La distanza fra  $l$  ed  $m$ .

**Definizione.** Una *sfera* in  $\mathbf{R}^3$  di centro  $\mathbf{c}$  e raggio  $r$  è l'insieme dei punti che ha distanza uguale ad  $r$  da  $\mathbf{c}$ .

Siccome i punti  $\mathbf{x}$  sulla sfera di centro  $\mathbf{c}$  e raggio  $r$  sono i punti che soddisfano

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| = r,$$

l'equazione della sfera è data da

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + (x_3 - c_3)^2 = r^2.$$

**Proposizione 5.9.** Sia  $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + (x_3 - c_3)^2 = r^2$  una sfera  $S$  in  $\mathbf{R}^3$  di centro  $\mathbf{c}$  e raggio  $r$ . Un'equazione del piano tangente alla sfera nel punto  $\mathbf{q} \in S$  è data da

$$(q_1 - c_1)(x_1 - q_1) + (q_2 - c_2)(x_2 - q_2) + (q_3 - c_3)(x_3 - q_3) = 0.$$

**Dimostrazione.** Sia  $\mathbf{x}$  un punto arbitrario su detta tangente. Poiché il piano tangente in  $\mathbf{q}$  è perpendicolare alla retta passante per  $\mathbf{q}$  ed il centro della sfera  $\mathbf{c}$ , si ha che:

$$(\mathbf{q} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{q}) = 0$$

come richiesto.

Fig.15. Il piano tangente alla sfera nel punto  $\mathbf{q}$ .

**Esempio 5.10.** (*Intersezione fra una retta e una sfera*) Consideriamo ora il problema di calcolare l'intersezione fra una retta ed una sfera tramite un esempio esplicito. Sia  $S$  la sfera di equazione

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 = 9$$

e sia  $l$  la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Per calcolare l'intersezione  $S \cap l$  sostituiamo il punto generico della retta  $l$  nell'equazione della sfera  $S$ :

$$((1+t) - 2)^2 + ((3+t) - 1)^2 + ((1+2t) - 1)^2 = 9.$$

L'equazione diventa  $6t^2 + 2t - 4 = 0$ . Risolvendo troviamo  $t = -1$  oppure  $t = 2/3$ , corrispondenti ai punti di intersezione

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 11/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}.$$

In generale, a seconda che l'equazione quadratica in  $t$  ammetta due, una o nessuna soluzione reale, si ha rispettivamente che la retta interseca la sfera in due punti, un punto (in questo caso la retta è tangente alla sfera) o nessun punto.

Analogamente, l'intersezione di una sfera con un *piano* può essere una circonferenza in  $\mathbf{R}^3$ , un punto (caso di un piano tangente), o può essere vuota. Osserviamo che è impossibile descrivere una circonferenza in  $\mathbf{R}^3$  tramite una sola equazione di grado 2.

**Esempio 5.11.** Dati un piano  $\pi$  ed una sfera  $S$  in  $\mathbf{R}^3$ , come calcolare il *raggio* della circonferenza  $\pi \cap S$ ? Basterà calcolare la distanza  $d$  fra il centro  $\mathbf{c}$  della sfera ed il piano  $\pi$  e poi applicare il Teorema di Pitagora come nella Figura 16.

Fig.16. Il raggio della circonferenza  $\pi \cap S$ .

Per esempio, consideriamo  $\pi$  il piano di equazione  $x_1 - x_2 + x_3 = 1$  e la sfera  $S$  di equazione  $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2 = 5$ . La distanza  $d$  fra il centro della sfera  $\mathbf{c}$  ed il piano  $\pi$  è

$$d = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Il raggio della sfera è uguale a  $\sqrt{5}$ . Il raggio  $r$  della circonferenza  $\pi \cap S$  soddisfa

$$r^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = (\sqrt{5})^2,$$

da cui si ricava  $r = \sqrt{11/3}$ .

**Esercizi.**

(5.A) Sia  $\mathbf{x}$  il vettore  $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Trovare altri tre punti sulla retta  $r$  passante per  $\mathbf{0}$  ed  $\mathbf{x}$ .

(5.B) Siano  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  due vettori in  $\mathbf{R}^3$ .

(i) Calcolare il punto medio fra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

(ii) Trovare altri tre punti sul piano che passa per  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

(iii) Trovare un'equazione parametrica della retta passante per  $\mathbf{x}$  ed  $\mathbf{y}$ .

(5.C) Siano  $\pi$  e  $\pi'$  due piani in  $\mathbf{R}^3$  di equazioni cartesiane

$$2x_1 - 3x_2 + 1 = 0, \quad 3x_1 + x_3 - 2 = 0.$$

(i) Trovare equazioni parametriche per  $\pi$  e  $\pi'$ .

(ii) Calcolare un'equazione parametrica per la retta intersezione  $\pi \cap \pi'$ .

(5.D) Siano  $\pi_1$  e  $\pi_2$  due piani in  $\mathbf{R}^3$  di equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbf{R}$$

e

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

- (i) Calcolare un'equazione cartesiana dell'intersezione  $\pi_1 \cap \pi_2$ .
- (ii) Calcolare un'equazione parametrica dell'intersezione  $\pi_1 \cap \pi_2$ .

(5.E) Siano  $l$  e  $m$  le rette in  $\mathbf{R}^3$  di equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

- (i) Calcolare l'intersezione  $l \cap m$ .
  - (ii) Trovare una retta che incontra sia  $l$  che  $m$ .
- (5.F) Sia  $\pi$  il piano in  $\mathbf{R}^3$  di equazione  $x_1 - 2x_3 = 3$ .
- (i) Trovare un vettore normale a  $\pi$ .
  - (ii) Trovare un altro vettore normale a  $\pi$ .
  - (iii) Calcolare un'equazione parametrica per  $\pi$ .
  - (iv) Calcolare un'altra equazione parametrica per  $\pi$ .
- (5.G) Sia  $l$  la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Sia  $m$  la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

- (i) Calcolare l'intersezione di  $l$  ed  $m$ .
  - (ii) Calcolare l'angolo fra  $l$  ed  $m$ .
- (5.H) Sia  $\pi$  il piano di equazione  $2x_1 + x_2 - x_3 + 3 = 0$ . Sia  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (i) Calcolare un'equazione cartesiana per il piano  $\pi_1$  che passa per  $\mathbf{p}$  ed è parallelo a  $\pi$ .
  - (ii) Calcolare un'equazione parametrica per la retta  $l$  che passa per  $\mathbf{p}$  ed è ortogonale a  $\pi$ .
  - (iii) Trovare i punti di intersezione  $\pi \cap l$  e  $\pi_1 \cap l$ .
  - (iv) Calcolare la distanza fra i due punti nella parte (iii).

(5.I) Sia  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  e sia  $\pi$  il piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbf{R}.$$

- (i) Calcolare la proiezione ortogonale del punto  $\mathbf{q}$  sul piano  $\pi$
  - (ii) Calcolare la distanza fra  $\mathbf{q}$  e  $\pi$ .
- (5.J) Sia  $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$  il punto di coordinate  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  e sia  $\pi$  il piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbf{R}.$$



- (i) Calcolare la distanza fra  $\mathbf{p}$  e  $\pi$ .
  - (ii) Calcolare la proiezione ortogonale di  $\mathbf{p}$  su  $\pi$ .
  - (iii) Calcolare le coordinate del punto  $\mathbf{q}$  simmetrico di  $\mathbf{p}$  rispetto a  $\pi$ .
- (5.K) Sia  $S$  la sfera di equazione  $(x_1 + 1)^2 + x_2^2 + (x_3 + 2)^2 = 4$ .
- (i) Far vedere che  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  sta sulla sfera  $S$ . Trovare un altro punto sulla sfera.
  - (ii) Calcolare il piano  $\pi$  tangente ad  $S$  nel punto  $\mathbf{p}$ .
  - (iii) Calcolare il piano  $\pi'$  tangente ad  $S$  nel punto  $\mathbf{q}$ .
- (5.L) Sia  $S$  la sfera di equazione  $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 + 2)^2 = 4$ . Sia  $\pi$  il piano di equazione  $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ .
- (i) Calcolare la distanza fra  $\pi$  e il centro di  $S$ .
  - (ii) Far vedere che l'intersezione  $S \cap \pi$  è una circonferenza. Calcolarne il raggio.
- (5.M) Sia  $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$  il punto di coordinate  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e sia  $m$  la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

- (i) Calcolare un'equazione cartesiana del piano che passa per  $m$  e  $\mathbf{p}$ .
- (ii) Calcolare un'equazione parametrica della retta  $l$  passante per  $\mathbf{p}$  e perpendicolare ad  $m$ .
- (iii) Calcolare il punto di intersezione  $l \cap m$ .
- (iv) Calcolare la distanza fra  $\mathbf{p}$  e la retta  $m$ .

## 6. Trasformazioni in $\mathbf{R}^3$ .

In questo paragrafo studiamo alcune trasformazioni geometriche dello spazio  $\mathbf{R}^3$ . Per trasformazioni si intendono sempre delle applicazioni bigettive  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ .

**Definizione.** Sia  $\mathbf{p}$  un vettore di  $\mathbf{R}^3$ . La *traslazione*  $T_{\mathbf{p}}$  di passo  $\mathbf{p}$  è l'applicazione  $T_{\mathbf{p}} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  data da

$$T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{p}.$$

In coordinate,

$$T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \\ x_3 + p_3 \end{pmatrix}.$$

Le traslazioni godono delle seguenti proprietà:

### Proposizione 6.1.

- (i) Siano  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^3$ . Allora  $T_{\mathbf{p}} \circ T_{\mathbf{q}} = T_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = T_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} = T_{\mathbf{q}} \circ T_{\mathbf{p}}$ . In particolare, la composizione di due traslazioni è una traslazione.
- (ii) La traslazione  $T_{\mathbf{0}}$  è l'applicazione identica.
- (iii) La traslazione  $T_{-\mathbf{p}}$  è l'inversa di  $T_{\mathbf{p}}$ , ossia  $T_{\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{p}} = (T_{-\mathbf{p}} \circ T_{\mathbf{p}}) = T_{\mathbf{0}}$  è l'applicazione identica.

**Dimostrazione.** La dimostrazione è simile a quella della Prop.3.1 ed è lasciata al lettore.

Un'altra famiglia di trasformazioni di  $\mathbf{R}^3$  sono le *dilatazioni*.

**Definizione.** Siano  $\lambda, \mu, \rho \in \mathbf{R}$ ,  $\lambda, \mu, \rho > 0$ . La dilatazione  $D_{\lambda, \mu, \rho}$  di  $\mathbf{R}^3$  è l'applicazione  $D_{\lambda, \mu, \rho} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  definita da

$$D_{\lambda, \mu, \rho} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \mu x_2 \\ \rho x_3 \end{pmatrix}.$$

In notazione matriciale,

$$D_{\lambda,\mu,\rho} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Se  $\lambda = \mu = \rho > 0$ , la dilatazione  $D_{\lambda,\mu,\rho}$  è semplicemente un “ingrandimento” di fattore  $\lambda = \mu = \rho$ . In generale,  $D_{\lambda,\mu,\rho}$  è un ingrandimento di fattore  $\lambda$  nella direzione dell’asse delle  $x_1$ , di fattore  $\mu$  nella direzione dell’asse delle  $x_2$  e di fattore  $\rho$  nella direzione dell’asse delle  $x_3$ .

Introduciamo adesso le *rotazioni* e le riflessioni in  $\mathbf{R}^3$ . La teoria è un po’ più complicata di quella in  $\mathbf{R}^2$ . Cominciamo con le rotazioni e le riflessioni in forma standard e poi trattiamo il caso generale.

**Definizione.** Sia  $\varphi \in \mathbf{R}$ . Indichiamo con  $R_\varphi: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l’applicazione che ad un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$

associa il vettore  $\mathbf{x}$  ruotato di un angolo  $\varphi$  intorno al vettore  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Se  $\varphi > 0$ , la rotazione indotta sul piano  $(x_2, x_3)$  va intesa in senso antiorario (vedi Cap. 3). Se  $\varphi < 0$ , la rotazione va intesa in senso opposto, cioè in senso “orario”.

Fig.17. La rotazione  $R_\varphi$ .

**Teorema 6.2.** Sia  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$  e sia  $\varphi \in \mathbf{R}$ . Le coordinate del punto  $\mathbf{y} = R_\varphi(\mathbf{x})$  sono date da

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= \cos(\varphi)x_2 - \sin(\varphi)x_3, \\ y_3 &= \sin(\varphi)x_2 + \cos(\varphi)x_3. \end{aligned}$$

In notazione matriciale

$$R_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

**Dimostrazione.** Questa formula segue dalla formula del Teorema 3.2 per la rotazione  $R_\varphi$  in  $\mathbf{R}^2$  di centro  $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^2$  e angolo  $\varphi$ .

Per esempio, la rotazione  $R_{\pi/4}$  in  $\mathbf{R}^3$  è data da

$$R_{\pi/4} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}x_3 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}x_3 \end{pmatrix}.$$

**Osservazione.** Come ottenere le formule della rotazione di un angolo  $\varphi$  intorno ad una retta arbitraria che passa per  $\mathbf{0}$ ? Inanzitutto, notiamo che il problema non è ben posto se la retta non è orientata: non è chiaro infatti in quale direzione si deve fare la rotazione. Se la retta è orientata, per fissare il *senso* della rotazione parleremo di *rotazione di un angolo  $\varphi$  intorno ad un vettore  $\mathbf{v}$*  con direzione e verso uguali a quelli della retta. Un metodo naturale per ottenere le formule di una rotazione  $R_{\varphi, \mathbf{v}}$  di angolo  $\varphi$  intorno ad un vettore  $\mathbf{v}$  diverso da  $\mathbf{e}_1$ , è il seguente.

Sia  $\mathbf{e}'_1$  un vettore parallelo a  $\mathbf{v}$  e di lunghezza 1. Scegliamo poi due vettori  $\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3 \in \mathbf{R}^3$  di lunghezza 1, in modo che  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$  siano ortogonali fra loro ed orientati positivamente. I vettori  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$  formano in particolare una base ortonormale di  $\mathbf{R}^3$ . I vettori  $\mathbf{e}'_2$  e  $\mathbf{e}'_3$  con queste proprietà possono essere scelti in infiniti modi. Siano  $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$  le coordinate di un generico vettore  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ , rispetto a questa base. Per il teorema 6.2, rispetto a questa base, la rotazione è data da

$$R_{\varphi, \mathbf{v}} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \cos(\varphi)x'_2 - \sin(\varphi)x'_3 \\ \sin(\varphi)x'_2 + \cos(\varphi)x'_3 \end{pmatrix} = A'_\varphi \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix},$$

dove

$$A'_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

è la matrice rappresentativa corrispondente. Sia  $M$  la matrice del cambiamento di base dalla base  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  alla base canonica  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ; le colonne di  $M$  sono i vettori della base  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  espressi nella base canonica  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . La matrice rappresentativa  $A_{\varphi, \mathbf{v}}$  di  $R_{\varphi, \mathbf{v}}$  rispetto alla base canonica è data dunque da

$$A_{\varphi, \mathbf{v}} = MA'_{\varphi, \mathbf{v}}M^{-1}.$$

**Esempio 6.3.** Calcoliamo le formule della rotazione di un angolo  $\pi/4$  intorno al vettore

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I vettori

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

formano una base ortonormale per  $\mathbf{R}^3$ , orientata positivamente. La matrice rappresentativa della rotazione  $R_{\pi/4}$  rispetto alla base  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  è data da

$$A'_{\pi/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $M$  del cambiamento di base  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\} \rightarrow \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  è data da

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e la matrice rappresentativa  $A_{\pi/4}$  della rotazione rispetto alla base canonica è quindi data da

$$A_{\pi/4} = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

**Osservazione.** Come calcolare le formule della rotazione  $R$  di un angolo  $\varphi$  rispetto ad una retta orientata  $l$  che non passa per l'origine? La strategia è di traslare la retta  $l$  nell'origine, di ruotare di un angolo  $\varphi$  intorno ad un vettore  $\mathbf{v}$  con direzione e verso uguali ad  $l$ , e di ritraslare infine la retta "dov'era".

**Esempio 6.7.** Calcoliamo ad esempio la rotazione di un angolo  $\pi/3$  rispetto alla retta  $l$  di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Cominciamo con una traslazione che porta  $l$  in una retta per l'origine  $\mathbf{0}$ . Per esempio la traslazione  $T\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$  di passo  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  porta  $l$  nella retta  $m$ , parallela ad  $l$  e passante per l'origine. La retta  $m$  ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R},$$

e coincide con l'asse delle  $x_2$ . Fissiamo il vettore  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  parallelo ad  $m$ . Rispetto alla base  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$ , orientata positivamente, la matrice rappresentativa della rotazione  $R_{\pi/3}$  è data da

$$R_{\pi/3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 1/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice del cambiamento di base da  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$  alla base canonica  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  è

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi, rispetto alla base canonica, la matrice rappresentativa della rotazione intorno a  $\mathbf{v}$  risulta

$$R_{\pi/3, \mathbf{v}} = MR_{\pi/3}M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

In totale, le formule della rotazione intorno ad  $l$  sono quindi

$$R = T\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) R_{\pi/3, \mathbf{v}} T\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

ossia

$$R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo adesso che la retta  $l$ , e quindi la retta  $m$ , abbia l'orientazione opposta. Il vettore  $\mathbf{v}' = -\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ha la direzione e il verso di  $m$ . In questo caso, la base  $\mathcal{B}'' = \{-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$  è ortonormale ed orientata positivamente ed il cambiamento di base da  $\mathcal{B}''$  alla base canonica è dato dalla matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rispetto alla base  $\mathcal{B}''$  la matrice rappresentativa della rotazione è ancora  $R_{\pi/3}$ , ma rispetto alla base canonica troviamo adesso la matrice

$$R_{\pi/3, \mathbf{v}'} = NR_{\pi/3}N^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

In totale, le formule della rotazione intorno ad  $l$  risultano quindi

$$R' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

**Definizione.** Sia  $S : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  la riflessione rispetto al piano di equazione  $x_3 = 0$ . Abbiamo

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix},$$

ed in forma matriciale,

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Fig.18. La riflessione  $S$  rispetto al piano  $x_3 = 0$ .

La riflessione rispetto ad una retta  $l$  è un particolare tipo di rotazione, precisamente la rotazione di un angolo di 180 gradi intorno alla retta stessa. In questo caso, il risultato non dipende dall'orientazione di  $l$ .

**Definizione.** La riflessione  $U$  rispetto all'origine  $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^3$  è data dalla formula

$$U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix},$$

oppure, in notazione matriciale, da

$$U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Fig.19. La riflessione  $U$  rispetto all'origine  $\mathbf{0}$ .

**Esempio.** (*riflessione rispetto ad un piano arbitrario*) Spieghiamo adesso come ottenere la formula per la riflessione  $S_\pi$  rispetto ad un arbitrario piano  $\pi$  mediante un esempio esplicito. Sia  $\pi$  il piano di equazione  $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4$ . Sia  $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$  un punto arbitrario. La retta  $l$  che passa per  $\mathbf{p}$  ed è perpendicolare a  $\pi$  è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

L'intersezione  $l \cap \pi$  è un punto  $\mathbf{q}$  che corrisponde al valore del parametro

$$t = t_0 = \frac{4 - p_1 + 2p_2 - 2p_3}{9}.$$

Siccome  $\mathbf{p}$  corrisponde a  $t = 0$ , il punto  $S_\pi(\mathbf{p})$ , simmetrico di  $\mathbf{p}$  rispetto a  $\pi$ , corrisponde a  $t = 2t_0$ . Si ha quindi

$$\begin{aligned} S_\pi \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + 2t_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + 2 \frac{4 - p_1 + 2p_2 - 2p_3}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8/9 \\ -16/9 \\ 16/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/9 & 4/9 & -4/9 \\ 4/9 & 1/9 & 8/9 \\ -4/9 & 8/9 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Fig.20. La riflessione  $S_\pi$  rispetto al piano  $\pi$ .

**Osservazione** In generale, la riflessione  $S_\pi$  rispetto ad un piano  $\pi$  non è un'applicazione lineare, ma è una applicazione lineare seguita da una traslazione. La riflessione  $S_\pi$  è lineare se e soltanto se  $\pi$  passa per l'origine  $\mathbf{0}$ .

**Esempio.** (*riflessione rispetto ad un punto arbitrario*) Spieghiamo adesso come ottenere la formula della riflessione rispetto ad un punto arbitrario, tramite un esempio esplicito. Sia  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$  un punto fissato e sia  $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$  un punto arbitrario. Sia  $U_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})$  il punto simmetrico di  $\mathbf{p}$  rispetto a  $\mathbf{q}$ . Poiché il centro di riflessione  $\mathbf{q}$  è il punto medio fra  $\mathbf{p}$  e  $U_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})$  si ha che  $\mathbf{q} = 1/2(\mathbf{p} + U_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}))$ . Di conseguenza

$$U_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = 2\mathbf{q} - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 - p_1 \\ -2 - p_2 \\ 4 - p_3 \end{pmatrix}.$$

**Osservazione.** Tutte le trasformazioni lineari di  $\mathbf{R}^3$  mandano rette in rette e piani in piani. Lo stesso vale per le traslazioni e dunque per la composizione di trasformazioni lineari e traslazioni. Se  $M$  è la matrice rappresentativa di una trasformazione lineare di  $\mathbf{R}^3$  ed  $r$  è una retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbf{R},$$

la retta immagine di  $R$  tramite  $M$  ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = M\mathbf{p} + tM\mathbf{v}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Analogamente, se  $\pi$  è un piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbf{R},$$

il piano immagine di  $\pi$  tramite  $M$  ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = M\mathbf{p} + tM\mathbf{v} + sM\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbf{R}.$$

Analogamente, se  $T_{\mathbf{q}}$  è una traslazione di passo  $\mathbf{q}$  in  $\mathbf{R}^3$ , l'immagine di  $r$  tramite  $T_{\mathbf{q}}$  ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbf{R};$$

l'immagine di  $\pi$  tramite  $T_{\mathbf{q}}$  ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbf{R}.$$

**Osservazione.** Per concludere osserviamo che, in generale, una trasformazione lineare  $f$  di  $\mathbf{R}^3$  preserva l'orientazione se e soltanto se  $\det(f) > 0$ . Le rotazioni  $R_{\varphi, \mathbf{v}}$  preservano l'orientazione della base canonica di  $\mathbf{R}^3$  e le loro matrici rappresentative hanno sempre determinante uguale a 1. Le riflessioni  $S$  ed  $U$  invece cambiano l'orientazione della base canonica di  $\mathbf{R}^3$  e le loro matrici rappresentative hanno determinante uguale a  $-1$ . Le dilatazioni  $D_{\lambda, \mu, \rho}$  preservano l'orientazione in quanto

$$\begin{aligned} \text{Or}(D_{\lambda, \mu, \rho}(\mathbf{v}), D_{\lambda, \mu, \rho}(\mathbf{w}), D_{\lambda, \mu, \rho}(\mathbf{u})) &= \text{Or} \left( \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \mu v_2 \\ \rho v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda w_1 \\ \mu w_2 \\ \rho w_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \mu u_2 \\ \rho u_3 \end{pmatrix} \right), \\ &= \lambda \mu \rho \text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}). \end{aligned}$$

### Esercizi.

(6.A) Siano  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

(i) Trovare le formule per la traslazione  $T_{\mathbf{p}}$ .

(ii) Calcolare  $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

(iii) Calcolare  $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

(iv) Calcolare  $(T_{\mathbf{q}} \circ T_{3\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $(T_{3\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{q}}) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

(6.B) Sia  $D_{2,5,3}$  la dilatazione data dalla matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

(i) Trovare una dilatazione  $D_{\lambda, \mu, \rho}$  tale che  $D_{\lambda, \mu, \rho} \circ D_{2,5,3}$  sia l'applicazione identica.

(ii) Trovare una dilatazione  $D_{\lambda, \mu, \rho}$  tale che  $D_{2,5,3} \circ D_{\lambda, \mu, \rho}$  sia l'applicazione identica.

(6.C) Sia  $C$  il cubo in  $\mathbf{R}^3$  di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Quali sono i vertici di  $C$  dopo la rotazione  $R_{\pi/2}$  intorno al vettore  $\mathbf{e}_3$ ?

(ii) Quali sono i vertici di  $C$  dopo la rotazione  $R_{\pi}$  intorno al vettore  $\mathbf{e}_3$ ?

(iii) Quali sono i vertici di  $C$  dopo la rotazione  $R_{3\pi/2}$  intorno al vettore  $\mathbf{e}_3$ ?



(6.D) Sia  $C$  il cubo in  $\mathbf{R}^3$  di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Disegnare l'immagine di  $C$  dopo la rotazione  $R_{\pi/2}$  intorno a  $\mathbf{e}_3$ .
- (ii) Disegnare l'immagine di  $C$  dopo la rotazione  $R_{\pi/2}$  intorno a  $\mathbf{e}_1$ .
- (iii) Disegnare l'immagine di  $C$  dopo la rotazione  $R_{\pi/2}$  intorno a  $-\mathbf{e}_1$ .
- (iv) Quali rotazioni mandano il cubo in se stesso?

(6.E) Sia  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ .

- (i) Trovare le formule per la rotazione  $R_{\pi/2, \mathbf{v}}$  di un angolo  $\pi/2$  intorno a  $\mathbf{v}$ .
- (ii) Trovare le formule per la rotazione  $R_{-\pi/4, \mathbf{v}}$  di un angolo  $-\pi/4$  intorno a  $\mathbf{v}$ .
- (iii) Sia  $l$  la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

- Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando  $R_{\pi/2, \mathbf{v}}$  a  $l$ .
- (iv) Sia  $\pi$  il piano di equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 = 7.$$

Calcolare un'equazione parametrica del piano che si ottiene applicando  $R_{-\pi/4, \mathbf{v}}$  a  $\pi$ .

(6.F) Sia  $\pi$  il piano di equazione  $x_1 + 2x_2 = 0$ .

- (i) Calcolare le formule della riflessione rispetto a  $\pi$ .
- (ii) Calcolare le immagini dei punti

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (iii) Calcolare l'immagine della retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

(6.G) Sia  $C$  il cubo dell'Eserc.6.C. Calcolare l'immagine di  $Q$  dopo la riflessione rispetto

- (i) al piano  $(x_1, x_2)$ .
- (ii) al piano  $(x_2, x_3)$ .
- (iii) al piano di equazione  $x_1 = x_2$ .

(6.H) Sia  $C$  il cubo dell'Eserc.6.D. Calcolare l'immagine di  $C$  dopo la riflessione rispetto

- (i) al piano  $(x_1, x_2)$ .
- (ii) al piano  $(x_2, x_3)$ .
- (iii) al piano di equazione  $x_1 = x_2$ .
- (iv) Trovare tutte le riflessioni  $S_\pi$  che mandano  $C$  in se stesso.

(6.I) Siano  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

- (i) Calcolare la formula per la riflessione  $U_{\mathbf{p}}$  rispetto al punto  $\mathbf{p}$ .
- (ii) Calcolare la formula per la riflessione  $U_{\mathbf{q}}$  rispetto al punto  $\mathbf{q}$ .
- (iii) Calcolare le formule per la trasformazione  $U_{\mathbf{p}} \circ U_{\mathbf{q}}$  e per  $U_{\mathbf{q}} \circ U_{\mathbf{p}}$ .
- (iv) Geometricamente, che cosa fanno le trasformazioni  $U_{\mathbf{p}} \circ U_{\mathbf{q}}$  e  $U_{\mathbf{q}} \circ U_{\mathbf{p}}$ ?

(6.J) Sia  $\pi$  il piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbf{R}$$

e sia  $\pi'$  il piano di equazione  $x_3 = 0$ .

- (i) Trovare le formule della riflessione  $S_{\pi}$  rispetto a  $\pi$ .
- (ii) Calcolare le formule della riflessione  $S_{\pi'}$  rispetto a  $\pi'$ .
- (iii) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S_{\pi} \circ S_{\pi'}.$$

- (iv) Calcolare le formule per la trasformazione composta

$$S_{\pi'} \circ S_{\pi}.$$

(6.K) Dimostrare che una dilatazione  $D_{\lambda, \mu, \rho}$  conserva le direzioni delle rette e dei piani se e solo se  $\lambda = \mu = \rho$ .