1. Con $\mathcal{P}(A)$ indichiamo l'insieme delle parti di un insieme A. Sia $X = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$. Definiamo un ordinamento parziale su X ponendo $A \leq B$ quando $A \subset B$ per $A, B \in X$. Disegnare il diagramma di Hasse di questo ordinamento.
2. Sia X un insieme e siano R_1 e R_2 due relazioni di equivalenza su X.
   (a) Dimostrare che $R_1 \cap R_2$ è una relazione di equivalenza.
   (b) Descrivere la partizione di X associata alla relazione $R_1 \cap R_2$ in termini di quelle associate a R_1 e R_2.
   (c) Esibire un esempio di R_1 e R_2 tali che $R_1 \cup R_2$ non è una relazione di equivalenza.
3. Sia $X = \{1, 2, 3, 4\}$.
   (a) Esibire una relazione su di X, che sia riflessiva, simmetrica, ma non transitiva.
   (b) Esibire una relazione su di X, che sia simmetrica, transitiva ma non riflessiva.
   (c) Esibire una relazione su di X, che sia riflessiva, transitiva, ma non simmetrica.
4. Per le seguenti relazioni R di $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ stabilire quali sono simmetriche, rifflessive o transitive.
   (a) $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n = m\}$; (b) $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : |n - m| = 5\}$;
   (c) $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n \geq m\}$; (d) $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n^2 \equiv m^2 \pmod 7\}$.
5. Quante relazioni di equivalenza distinte si possono definire sull'insieme $\{a, b, c, d\}$?
6. Sia A un insieme di n elementi. Per $i = 0, 1, \ldots, n$, sia $P_i \subset \mathcal{P}(A)$ la collezione dei sottoinsiemi di A che possiedono esattamente i elementi.
   (a) Dimostrare che gli insiemi P_i formano una partizone di $\mathcal{P}(A)$.
   (b) Esibire una relazione di equivalenza su $\mathcal{P}(A)$ che induce la partizione della parte (a).
7. Sia $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ e sia $R = \{((a, b), (c, d)) \in A \times A : a + d = b + c\}$.
   (a) Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.
   (b) Sia $\tilde{A} =$ l'insieme delle classi di equivalenza di R. Dimostrare che la mappa $f : \tilde{A} \longrightarrow \mathbf{Z}$ che associa la differenza $a - b$ alla classe di (a, b), è ben definita ed è una biezione.
8. Sia $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ e sia $R = \{((a, b), (c, d)) \in A \times A : ad = bc\}$.
   (a) Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.
   (b) Sia $\tilde{A} =$ l'insieme delle classi di equivalenza di R. Dimostrare che la mappa $f : \tilde{A} \longrightarrow \mathbf{Q}_{>0}$ che associa la frazione a/b alla classe di (a, b), è ben definita ed è una biezione.
9. L'insieme $\{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\}$ è ordinato mediante $d \leq d'$ quando d divide d'.
   (a) Determinare gli elementi massimali e minimali.
   (b) Esibire, se esistono, i massimi e minimi assoluti.
   (c) Trovare i maggioranti di $\{2, 9\}$ e, se esiste, $\sup(2, 9)$.
   (d) Trovare i minoranti di $\{60, 72\}$ e, se esiste, $\inf(60, 72)$.
10. Sia $X \subset \mathcal{P}\{1, 2, 3, 4\}$ dato da $X = \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$. Definiamo un ordinamento parziale sui X ponendo $A \leq B$ quando $A \subset B$ per $A, B \in X$.
    (a) Determinare gli elementi massimali e minimali.
    (b) Esibire, se esistono, i massimi e minimi assoluti.
    (c) Trovare i maggioranti di $\{\{2, \}, \{4\}\}$ e, se esiste, $\sup(\{2, \}, \{4\})$.
    (d) Trovare i minoranti di $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ e, se esiste, $\inf(\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\})$.
11. Sia $A = \{a, b, c, d, e\}$. Determinare la chiusura transitiva delle seguenti relazioni:
    (a) $\{(a, c), (b, d), (c, a), (d, b), (e, d)\}$.
    (b) $\{(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c)\}$.
    (c) $\{(a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, a), (e, d)\}$.
    (d) $\{(a, e), (b, a), (b, d), (c, d), (d, a), (d, c), (e, a), (e, b), (e, c), (e, e)\}$.