Teorema di Cantor-Bernstein-Schröder (1898)

Teorema. *Siano A e B due insiemi e siano $f : A \hookrightarrow B$ e $g : B \hookrightarrow A$ due applicazioni iniettive. Allora esiste una biiezione $A \longleftrightarrow B$.*

Lemma del punto fisso. *Sia A un insieme e sia $P(A)$ l'insieme delle sue parti. Sia $j : P(A) \longrightarrow P(A)$ un'applicazione con la proprietà che per ogni due sottoinsiemi $X, Y \subset A$ si ha che*

$$j(X) \subset j(Y), \qquad \text{quando } X \subset Y.$$

Allora esiste un 'punto fisso', vale a dire esiste $Z \subset A$ con $j(Z) = Z$.

Dimostrazione. Sia

$$\Omega = \{X \subset A : X \subset j(X)\}.$$

Controlliamo che l'insieme Z, unione degli insiemi $X \subset A$ che appartengono ad Ω, soddisfa $j(Z) = Z$. Infatti, sia $x \in Z$. Allora $x \in X$ per qualche $X \in \Omega$. Poiché $X \subset j(X)$ abbiamo quindi che $x \in j(X) \subset j(Z)$. Abbiamo dimostrato che $Z \subset j(Z)$. Per dimostrare l'inclusione opposta, applichiamo j. Troviamo $j(Z) \subset j(j(Z))$. Questo ci dice che $j(Z)$ appartiene ad Ω e quindi $j(Z) \subset Z$. Fatto.

Dimostrazione del Teorema. Definiamo l'applicazione $j : P(A) \longrightarrow P(A)$ tramite

$$j(X) \;=\; g(B - f(A - X)), \qquad \text{per } X \subset A.$$

Si ha $j(X) \subset j(Y)$ per ogni due sottoinsiemi $X \subset Y$ di A. Per il Lemma esiste un punto fisso Z. Poiché f è iniettiva, la restrizione di f ad $A - Z$ è una biiezione

$$A - Z \;\longleftrightarrow\; f(A - Z).$$

Poiché g è iniettiva, la restrizione di g ad $B - f(A - Z)$ è una biiezione

$$B - f(A - Z) \;\longleftrightarrow\; g(B - f(A - Z)) = j(Z) = Z.$$

Il teorema segue adesso dal fatto che A è unione disgiunta di Z e $X - Z$, mentre B è unione disgiunta di $f(A - Z)$ e $B - f(A - Z)$.