Algebra 2 (Schoof) 5^o appello 26 agosto 2021, ore 15:00–17:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Dimostrare che un'estensione F di $\mathbf{R}$ di grado dispari è necessariamente uguale a $\mathbf{R}$ stesso.
2. Sia p un numero primo e sia $n \geq 2$. Esibire un p-sottogruppo di Sylow di $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}_p)$.
3. Sia A il sottoanello $\{a + b\sqrt{-6} : a, b \in \mathbf{Z}\}$ di $\mathbf{C}$. Dimostrare che l'ideale $(2, \sqrt{-6})$ di A non è principale.
4. Sia K un campo di spezzamento del polinomio $X^{11} - 1 \in \mathbf{Z}_3[X]$. Determinare il grado $[K : \mathbf{Z}_3]$.
5. Sia R l'anello $\mathbf{Z}[X, Y]/(Y^2X - X)$. Sia $\overline{X} \in R$ la classe laterale di X e sia $\overline{Y} \in R$ la classe laterale di Y.
   (a) Dimostrare che abbiamo un'inclusione di ideali $(\overline{X}\,\overline{Y}) \subset (\overline{X})$.
   (b) Si ha anche che $(\overline{X}) \subset (\overline{X}\,\overline{Y})$?
6. Sia $n \geq 3$ e sia $t \in S_n$ una trasposizione. Sia $C = \{\sigma \in S_n : \sigma t = t\sigma\}$ il centralizzante di t.
   (a) Dimostrare che C è un sottogruppo di S_n.
   (b) Determinare la cardinalità di C.

Soluzioni.

1. Sia $z \in K$ e sia $f \in \mathbf{R}[X]$ il polinomio minimo di z su $\mathbf{R}$. Allora $\deg f = [\mathbf{R}(z) : \mathbf{R}]$ divide $[K : \mathbf{R}]$ ed è quindi dispari. Ma un polinomio di grado dispari in $\mathbf{R}[X]$ ha sempre uno zero reale e può solo essere irriducibile se il suo grado è 1. Ne segue che $f = X - z$ e quindi $z \in \mathbf{R}$ come richiesto.
2. Questo è l'esercizio 8 del foglio 2.
3. Questo è l'esercizio 5 del foglio 5.
4. Il campo K ha 3^d elementi. Poiché il polinomio $X^{11} - 1$ ha tutti gli zeri in K, si ha che 11 divide $\#K^* = 3^d - 1$. Poiché K è campo di spezzamento, d è minimale rispetto a questa proprietà. In altre parole, d è l'ordine di 3 modulo 11. In conclusione, $d = [K : \mathbf{Z}_3] = 5$.
5. Per (b) osserviamo l'identità $\overline{X} = \overline{Y}^2\overline{X}$. Abbiamo quindi l'inclusione $(\overline{X}) \subset (\overline{X}\,\overline{Y})$.
6. Una permutazione $\sigma \in S_n$ centralizza la trasposizione $(1\,2)$ se e solo se $(1\,2) = \sigma(1\,2)\sigma^{-1} = (\sigma(1), \sigma(2))$. Questo significa che σ è in C se e solo se il coniugio per σ preserva l'insieme $B = \{1, 2\}$. L'omomorfismo naturale $C \to S_B$ è suriettivo. Il suo nucleo è il sottogruppo delle permutazioni dell'insieme $\{3, 4, \ldots, n\}$. Ne segue che $\#C = 2 \cdot (n - 2)!$.