Algebra 2 (Schoof) | 4^o appello | 9 luglio 2021, ore 10:00–12:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia G un gruppo e sia $H \subset G$ un sottogruppo con $[G : H] = n$. Dimostrare che H contiene un sottogruppo N, normale in G, con la proprietà che $[G : N]$ divide $n!$.
2. Esistono $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ trascendenti, tali che sia $\alpha + \beta$ che $\alpha\beta$ siano algebrici? (Come al solito si intende trascendente e algebrico *su* $\mathbf{Q}$.)
3. Sia F un'estensione di $\mathbf{Q}$ di grado finito.
   (a) Sia $a \in F$. Dimostrare che se $[F : \mathbf{Q}]$ è primo, si ha che $\mathbf{Q}(a) = \mathbf{Q}$ oppure $\mathbf{Q}(a) = F$.
   (b) Esibire un'estensione F di $\mathbf{Q}$ di grado finito e un elemento $a \in F$ con la proprietà che $\mathbf{Q} \neq \mathbf{Q}(a) \neq F$.
4. Sia p un primo, sia $I \subset \mathbf{F}_p[X, Y]$ l'ideale generato da $X+Y^2$ e sia $J \subset \mathbf{F}_p[X, Y]$ l'ideale generato da $X^2 + Y$. Sia K l'ideale $I + J$. Calcolare la cardinalità di $\mathbf{F}_p[X, Y]/K$.
5. Gli anelli $\mathbf{R}[X, Y]/(X^2, XY, Y^2)$ e $\mathbf{R}[X, Y]/(X, Y^3)$ sono isomorfi? Esibire un isomorfismo o dimostrare che non esiste.
6. Siano p e q due numeri primi e sia G un gruppo di cardinalità p^2q^2. Dimostrare che G non può essere semplice.

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 5 del foglio 1.
2. Questo è l'esercizio 4 del foglio 8.
3. La formula $[F : \mathbf{Q}] = [F : \mathbf{Q}(a)][\mathbf{Q}(a) : \mathbf{Q}]$ implica (a). Per (b) un esempio è dato da $F = \mathbf{Q}(\sqrt[4]{2})$ e $a = \sqrt{2}$.
4. Si ha che $K = (X^2+Y, Y^2+X)$ e quindi valutare in $Y = -X^2$ è un isomorfismo $\mathbf{F}_p[X, Y]/K \cong \mathbf{F}_p[X]/(X^4 + X)$. Quest'ultimo anello ha p^4 elementi.
5. Entrambi gli anelli sono spazi vettoriali su $\mathbf{R}$ di dimensione 3, ma non sono isomorfi. Per varie ragioni. Per esempio, l'anello $\mathbf{R}[X, Y]/(X, Y^3)$ è isomorfo a $\mathbf{R}[Y]/(Y^3)$ ed ha solo un numero finito di ideali: (Y^k) per $0 \leq k \leq 3$. Invece l'anello $\mathbf{R}[X, Y]/(X^2, XY, Y^2)$ ha infiniti ideali. Infatti, gli ideali $(X + \lambda Y)$ per $\lambda \in \mathbf{R}$ sono tutti distinti. Alternativamente, entrambi gli anelli hanno un unico ideale massimale $\mathfrak{m}$. Per l'anello $\mathbf{R}[X, Y]/(X^2, XY, Y^2)$ si ha che $\mathfrak{m} = (X, Y)$ e che $\mathfrak{m}^2 = 0$. Invece, per $\mathbf{R}[Y]/(Y^3)$ si ha che $\mathfrak{m} = (Y)$ e $\mathfrak{m}^2 \neq 0$.
6. Se $p = q$, allora G è un p-gruppo di ordine p^4. In questo caso G non è semplice, perché il centro di G non é banale. Se $p \neq q$, possiamo supporre che G sia semplice e che $p < q$. Cerchiamo una contraddizione. Sia m il numero di q-sottogruppi di Sylow. Allora m divide p^2 e $m \equiv 1 \pmod{q}$. Poiché G è semplice si ha che $m \neq 1$ e dal fatto che $q > p$ segue che $m \neq p$. Abbiamo quindi che $m = p^2$. Ne segue che p^2 è congruo a 1 (mod q). In altre parole, q divide $p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1)$. Dal fatto che $q > p$ segue che $q = p + 1$ e quindi $p = 2$ e $q = 3$. La cardinalità di G è quindi 36. Il gruppo G permuta i quattro 3-sottogruppi di Sylow tramite coniugio. Questo ci dà un omomorfismo non banale $G \to S_4$ che non può essere iniettivo, contraddicendo la semplicità di G.