Algebra 2 (Schoof) 2^o appello 9 febbraio 2021, ore 10:00–12:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia p un primo. Dimostrare che gli anelli $\mathbf{Z}_p[X]$ e $\mathbf{Z}_p[X,Y]/(XY-1)$ non sono isomorfi.

2. Sia p un primo e sia G un gruppo finito semplice di cardinalità divisibile per p^2. Dimostrare che G non ammette sottogruppi di indice p.

3. Sia $p > 2$ un numero primo.
   (a) Il gruppo simmetrico S_p, quanti p-sottogruppi di Sylow possiede?
   (b) Sia N il normalizzante di un p-sottogruppo di Sylow H di S_p. Determinare $\#N$. (Per definizione si ha che $N = \{x \in S_p : xHx^{-1} = H\}$).

4. Sia k un campo di 16 elementi.
   (a) Dimostrare che $\mathbf{F}_2$ è un sottocampo di k.
   (b) Quanti elementi $\beta \in k$ ci sono con la proprietà che $k = \mathbf{F}_2(\beta)$?

5. Sia $\alpha = i\sqrt[4]{2} \in \mathbf{C}$.
   (a) Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbf{Q}$.
   (b) Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbf{Q}(\alpha)$.
   (c) Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbf{Q}(\sqrt[4]{2})$.

6. Sia p un primo e sia n un numero naturale. Sia A l'anello $\mathbf{F}_p[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ e sia I l'ideale di A generato da $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Determinare la cardinalità dell'anello quoziente A/I^2.

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 4 del foglio 14.
2. Questo è l'esercizio 8 del foglio 13.
3. Gli elementi di ordine p in S_p sono p-cicli. Ci sono $(p-1)!$ elementi di ordine p in S_p. Il numero di p-sottogruppi di Sylow è quindi $(p-1)!/(p-1) = (p-2)!$. Il gruppo S_p agisce tramite coniugio sull'insieme dei p-sottogruppi di Sylow. Per il teorema di Sylow c'è un'unica orbita. Il normalizzante di H è lo stabilizzatore di H ed ha quindi $\#S_p/(p-2)! = p!/(p-2)! = p(p-1)$ elementi.
4. Il sottocampo minimale di k è $\mathbf{F}_p$ per qualche primo p. Siccome p deve dividere $\#k$, abbiamo che $p = 2$. Se $\alpha \in k$, allora $\mathbf{F}_2(\alpha)$ è un sottocampo di k. Il campo k ha solo tre sottocampi, con inclusioni $\mathbf{F}_2 \subset \mathbf{F}_4 \subset k$. Ci sono quindi $\#k - \#\mathbf{F}_4 = 16 - 4 = 12$ elementi β con $\mathbf{F}_2(\beta) = k$.
5. (a) Il polinomio $X^4 - 2$ è irriducibile in $\mathbf{Q}[X]$ per il criterio di Eisenstein. Si tratta quindi del polinomio minimo di $i\sqrt[4]{2}$ su $\mathbf{Q}$. (b) Il polinomio minimo su $\mathbf{Q}(\alpha)$ è uguale a $X - \alpha$. (c) Il polinomio minimo di $i\sqrt[4]{2}$ su F è $f = X^2 + \sqrt{2}$. Infatti, f si annulla in $i\sqrt[4]{2}$ e f è irriducibile in $F[X]$, perché non ha zeri in F
6. L'ideale I^2 è generato da polinomi della forma X_iX_j con $1 \le i, j \le n$. Rappresentanti delle classi laterali di I^2 sono quindi polinomi della forma $a_0 + a_1X_1 + \ldots + a_nX_n$ con $a_i \in \mathbf{F}_p$ per $0 \le i \le n$. Poiché ce ne sono p^{n+1}, anche la cardinalità di A/I^2 è p^{n+1}.