1. Sia $L = \{(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3 : 2x + 3y + 4z \equiv 0 \pmod 7\}$. Dimostrare che L è un reticolo. Esibire una $\mathbf{Z}$-base e calcolare il covolume di L.

2. Sia $n \geq 1$ e sia $L \subset \mathbf{R}^n$ un reticolo. Sia A una matrice $n \times n$ invertibile.
   (a) Dimostrare che $A(L)$ è un reticolo.
   (b) Dimostrare che $\mathrm{covol}(A(L)) = |\det(A)|\mathrm{covol}(L)$.
   (c) Per $m \in \mathbf{R}_{>0}$ sia $mL = \{x \in \mathbf{R}^n :$ esiste $y \in L$ tale che $x = my\}$. Dimostrare che $\mathrm{covol}(mL) = m^n\mathrm{covol}(L)$.

3. Sia $L \subset \mathbf{Z}^3$ il sottogruppo generato da $\begin{pmatrix} -33 \\ -14 \\ 66 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 11 \\ 17 \\ -13 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -9 \\ 14 \\ 31 \end{pmatrix}$. Esibire un vettore non nullo $x \in L$ di lunghezza minimale.

4. Sia $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$ la funzione *Gamma* di $s \in \mathbf{R}_{>0}$.
   (a) Dimostrare che per $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ si ha che $\Gamma(n) = (n-1)!$
   (b) Dimostrare che $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

5. Sia $n \geq 1$. Dimostrare che il volume della palla unitaria $B_n = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ in $\mathbf{R}^n$ è uguale a $\pi^{n/2}/\Gamma(n/2 + 1)$.

6. Sia F un campo di numeri e sia $F_{\mathbf{C}}$ l'algebra complessa associata ad F. Per $x \in F_{\mathbf{C}}$ sia $\overline{x}$ l'elemento di $F_{\mathbf{C}}$ che ha come coordinate le coniugate delle coordinate di x.
   (a) Dimostrare che il prodotto Hermitiano canonico su $F_{\mathbf{C}}$ è dato da $\langle x, y\rangle = \mathrm{Tr}(x\overline{y})$ per $x, y \in F_{\mathbf{C}}$.
   (b) Sia $F_{\mathbf{R}}$ l'algebra reale associata ad F. Si ha che $F_{\mathbf{R}} \subset F_{\mathbf{C}}$. Dimostrare che se $x \in F_{\mathbf{R}}$ anche $\overline{x} \in F_{\mathbf{R}}$. Concludere che il prodotto scalare su $F_{\mathbf{R}}$ indotto dal prodotto Hermitiano canonico, è dato da $\langle x, y\rangle = \mathrm{Tr}(x\overline{y})$ per $x, y \in F_{\mathbf{R}}$.

7. La funzione zeta di $\mathbf{Q}(i)$.
   (a) Dimostrare che per $s > 1$ la funzione zeta di $\mathbf{Q}(i)$ è data da
   $$\zeta_{\mathbf{Q}(i)}(s) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1} \prod_{p \equiv 1 \pmod 4} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-2} \prod_{p \equiv 3 \pmod 4} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}.$$
   Qua p varia sui numeri primi.
   (b) Dimostrare che per $s > 1$ si ha che
   $$\frac{\zeta_{\mathbf{Q}(i)}(s)}{\zeta_{\mathbf{Q}}(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$
   Qua p varia sui numeri primi e la funzione $\chi : \mathbf{Z} \longrightarrow \{-1, 0, +1\}$ è definita da
   $$\chi(x) = \begin{cases} 1; & \text{se } x \equiv 1 \pmod 4, \\ 0; & \text{se } x \text{ è pari}, \\ -1; & \text{se } x \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$