1. (a) Dimostrare che $25 = 5^2$ e $25 = (1+2\sqrt{6})(1-2\sqrt{6})$ sono due fattorizzazioni di 25 come prodotti di elementi irridicubili di $\mathbf{Z}[\sqrt{-6}]$.
   (b) Dimostrare che le due fattorizzazioni sono distintie nel senso che i fattori irriducibili non sono uguali, neanche a meno di moltiplicazione per un'unità in A^*.
   (c) Scrivere gli ideali (5), $(1+2\sqrt{6})$ e $(1-2\sqrt{6})$ come prodotti di ideali primi del dominio di Dedekind $\mathbf{Z}[\sqrt{-6}]$.

2. L'anello $\mathbf{Z}[\frac{1+\sqrt{-23}}{2}]$ è l'anello degli interi del campo di numeri $\mathbf{Q}(\sqrt{-23})$. Sia I l'ideale $(2, \frac{1+\sqrt{-23}}{2})$. Dimostrare che I e I^2 non sono principali, ma I^3 lo è.

3. Dimostrare che l'anello delle funzioni continue $[0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ non è Noetheriano.

4. Sia R l'anello $\mathbf{Z}[2i] = \mathbf{Z}[X]/(X^2+4)$.
   (a) Dimostrare che R non è integralmente chiuso.
   (b) Sia I l'ideale generato da $(2, 2i) \subset R$. Dimostrare che per nessun $x \in I$ esiste un ideale $J \subset R$ tale che $IJ = (x)$.

5. Consideriamo le tre proprietà "Noetheriano", "integralmente chiuso" e "ogni ideale primo non nullo è massimale" che caratterizzano i domini di Dedekind. Esibire esempi di domini che hanno due di queste proprietà, ma non la terza.

6. Sia ϕ la funzione di Euler. Si ha che $\phi(n) = \#\mathbf{Z}_n^*$. Abbiamo le formule classiche:
   (a) $\phi(n) = n\prod_p(1-\frac{1}{p})$ (qua p varia fra i divisori primi di n);
   (b) $\sum_{d|n}\phi(d) = n$ (qua d varia fra i divisori positivi di n).

7. (Funzione ϕ di Euler per campi di numeri) Sia F un campo di numeri. Per un ideale $I \subset O_F$ non nullo, definiamo $\Phi(I) = \#(O_F/I)^*$.
   (a) Dimostrare che $\Phi(I) = N(I)\prod_{\mathfrak{p}}(1-N(\mathfrak{p})^{-1})$. (qua $\mathfrak{p}$ varia fra gli ideali primi $\mathfrak{p}$ di O_F che *dividono* I, cioè per cui $I \subset \mathfrak{p} \subset O_F$.)
   (b) Dimostrare che $\sum_J \Phi(J) = N(I)$. (qua J varia fra gli ideali per cui $I \subset J \subset R$).

8. Sia A un dominio di Dedekind.
   (a) Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo non nullo di A e sia $e \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$. Dimostrare che esiste $x \in A$ con $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(x) = e$.
   (b) Siano $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t$ ideali primi non nulli di A e siano $e_1, \ldots, e_t \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$. Dimostrare che esiste $x \in A$ con $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_i}(x) = e_i$ per ogni $i = 1, \ldots, t$. (Sugg: Teorema cinese del resto)
   (c) Sia $I \subset A$ un ideale non nullo. Dimostrare che A/I è un'anello a ideali principali.
   (d) Sia $I \subset A$ un ideale. Dimostrare che I può essere generato da due elementi di A.