

1. Calcolare i gradi su  $\mathbf{Q}$  dei seguenti sottocampi di  $\mathbf{C}$ :
  - (a)  $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ ; (b)  $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, i)$ ; (c)  $\mathbf{Q}(\exp(\frac{2\pi i}{p}))$ , per  $p$  un numero primo.
2. (a) Esibire  $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$  trascendenti, tali che la somma  $\alpha + \beta$  sia algebrica.  
(b) Esibire  $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$  trascendenti, tali che il prodotto  $\alpha\beta$  sia algebrico.  
(c) Esistono  $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$  trascendenti, tali che sia  $\alpha + \beta$  che  $\alpha\beta$  siano algebrici?
3. Sia  $K$  un campo finito. Dimostrare che  $\text{car}(K) = p$  per qualche numero primo  $p$ . Dimostrare  $\#K$  è una potenza di un numero primo.
4. Dimostrare che i sottocampi  $\mathbf{Q}(\pi)$  e  $\mathbf{Q}(e)$  di  $\mathbf{C}$  sono isomorfi (Sugg.  $\pi$  e  $e$  sono numeri trascendenti).
5. Sia  $f : K \rightarrow L$  un omomorfismo di campi. Dimostrare che  $\text{car } K = \text{car } L$ .
6. Sia  $F$  un campo. Un *automorfismo* di  $F$  è un omomorfismo di anelli  $F \rightarrow F$  biiettivo.
  - (a) Dimostrare che l'insieme degli automorfismi di  $F$  formano un gruppo:  $\text{Aut } F$ .
  - (b) Sia  $H$  un insieme di automorfismi di  $F$ . Dimostrare che l'insieme dei "punti fissi"  $F^H = \{x \in F : \sigma(x) = x \text{ per ogni } x \in H\}$  è un sottocampo di  $F$ .
  - (c) Sia  $K$  un sottocampo di  $F$ . Dimostrare gli automorfismi  $\sigma \in \text{Aut } F$  che hanno la proprietà che  $\sigma(x) = x$  per ogni  $x \in K$ , formano un sottogruppo di  $\text{Aut } F$ .
7. Sia  $K$  un campo e sia  $f : K \rightarrow K$  un automorfismo di campi. Dimostrare che la restrizione di  $f$  al sottocampo fondamentale di  $K$ , è l'identità.
8. Dimostrare che non è possibile costruire con riga e compasso un angolo di 1 grado.
9. Sia  $K \subset L$  un'estensione di grado  $[L : K]$  dispari. Sia  $\alpha \in L$ . Dimostrare che  $K(\alpha) = K(\alpha^2)$ .
10. Sia  $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{7}} \in \mathbf{C}$ .
  - (a) Determinare il polinomio minimo su  $\mathbf{Q}$  di  $\zeta$ .
  - (b) Determinare il polinomio minimo su  $\mathbf{Q}$  di  $\zeta + \zeta^{-1}$  (Sugg. il polinomio ha grado 3).
  - (c) Determinare il polinomio minimo su  $\mathbf{Q}$  di  $\eta = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$  (Sugg. calcolare  $\eta + \eta'$  e  $\eta\eta'$  dove  $\eta' = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6$ ).
11. Dimostrare che il campo  $\overline{\mathbf{Q}}$  dei numeri algebrici in  $\mathbf{C}$  è numerabile. Dimostrare che il grado  $[\overline{\mathbf{Q}} : \mathbf{Q}]$  è infinito.
12. Sia  $K$  un campo di caratteristica  $p > 0$ .
  - (a) Dimostrare che  $K^p = \{x^p : x \in K\}$  è un sottocampo di  $K$ .
  - (b) Per  $K = \mathbf{Z}_p$  calcolare il grado  $[K : K^p]$ .
  - (c) Stessa domanda per il campo delle funzioni razionali  $K = \mathbf{Z}_p(X)$ .