1. Scrivere i gruppi $\mathbf{Z}_{120}^*$ e $\mathbf{Z}_{10!}^*$ come prodotto di gruppi del tipo $\mathbf{Z}_n$.

2. Sia p un primo. Per un intero non nullo x sia $v_p(x) = k$ dove p^k è la potenza esatta di p che divide x e sia $|x|_p = \exp(-v_p(x))$. Definiamo $|x|_p = 0$ se $x = 0$.
   (a) Siano x, y interi non nulli. Dimostrare che $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.
   (b) Siano $x, y \in \mathbf{Z}$. Dimostrare che $|xy|_p = |x|_p|y|_p$ e che $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$.
   (c) Definiamo la *distanza* $d_p(x, y)$ *p-adica* fra due interi x, y come $d_p(x, y) = |x - y|_p$. Dimostrare che $d_p(x, y)$ definisce una metrica su $\mathbf{Z}$.

3. Sia k un campo. I seguenti $k[X]$-moduli hanno k-dimensione finita. Indicare una base e determinare la matrice rappresentativa per la moltiplicazione per X rispetto a questa base:
   (a) $k[X]/(X^4)$;
   (b) $k[X]/(X^2) \times k[X]/(X^2)$;
   (c) $k[X]/(X) \times k[X]/(X + 1) \times k[X]/(X + 2) \times k[X]/(X + 3)$.

4. Sia A un anello commutativo con 1 e sia $\mathfrak{m}$ un ideale di A. Come solito, per un sottoinsieme $S \subset A$ scriviamo $Z(S)$ per il sottoinsieme di $\mathrm{Spec}(A)$ degli ideali primi $\mathfrak{p}$ per cui $S \subset \mathfrak{p}$. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
   (1) L'ideale $\mathfrak{m}$ è massimale;
   (2) $\{\mathfrak{m}\} = Z(\mathfrak{m})$;
   (3) $\mathfrak{m}$ è un punto chiuso di $\mathrm{Spec}(A)$.

5. Sia R un anello commutativo con 1. Un elemento $x \in R$ si dice *nilpotente* se $x^n = 0$ per qualche $n \geq 0$.
   (a) Dimostrare che gli elementi nilpotenti di R formano un ideale N di R.
   (b) Dimostrare che $N \subset \bigcap_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}$ dove $\mathfrak{p}$ varia fra gli ideali primi di R. Nel prossimo esercizio dimostriamo l'inclusione opposta.

6. Siano R e N come nell'esercizio 5 e sia $x \in R - N$. Sia Ω l'insieme degli ideali I di R che hanno la proprietà che $x^n \notin I$ per ogni $n \geq 1$.
   (a) Dimostrare che $\Omega \neq \emptyset$.
   (b) Dimostrare che ogni catena in Ω ha un estremo superiore in Ω (l'ordinamento di Ω è dato dall'inclusione).
   (c) Per il Lemma di Zorn esiste un elemento massimale $M \in \Omega$. Dimostrare che M è un ideale primo di R.
   (d) Dimostrare che $\bigcap_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p} \subset N$

7. Sia $R = \{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R} : f \text{ è continua}\}$.
   (a) Dimostrare che R è un anello (con $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ e $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$.)
   (b) Per ogni $x \in [0, 1]$ sia $M_x = \{f \in R : f(x) = 0\}$. Dimostrare che M_x è un ideale massimale di R.
   (c) Dimostrare che ogni ideale massimale di R è uguale a M_x, per un certo $x \in [0, 1]$. (Sugg. Usare la compattezza dell'intervallo chiuso $[0, 1]$.)