1. Dire se i seguenti ideali degli anelli $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$ e $\mathbf{Z}_3[X]$ sono primi o meno:
$$(X^3-18X+12),\qquad (X^3-18X+12,5),\qquad (X^3-18X+12,X-1).$$
(Sono richieste quindi $3\times 3=9$ risposte ....)

2. Dire se il polinomio X^3-2 è irriducibile o meno negli anelli $\mathbf{R}[X]$, $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Z}_7[X]$, $\mathbf{Z}_{31}[X]$.

3. Fattorizzare il polinomio X^6-1 in $\mathbf{C}[X]$, $\mathbf{R}[X]$, $\mathbf{Z}_3[X]$, $\mathbf{Z}_5[X]$.

4. Decidere se il polinomio X^5+X^3+1 è irriducibile o meno negli anelli $\mathbf{Z}_2[X]$, $\mathbf{Z}_3[X]$, $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$ e $\mathbf{R}[X]$.

5. Il polinomio *reciproco* di $f=\sum_{j=0}^n a_jX^j\in\mathbf{Q}[X]$ (con a_0,a_n diversi da 0) è il polinomio $f^\vee=\sum_{j=0}^n a_{n-j}X^j\in\mathbf{Q}[X]$. Dimostare che f è irriducibile se e solo se $f^\vee$ è irriducibile.

6. Fattorizzare i seguenti elementi dell'anello R in fattori irriducibili di R.
   (a) X^2-Y^2 con $R=\mathbf{Q}[X,Y]$;
   (b) X^3+4X^2+9X+6 con $R=\mathbf{Z}[X]$;
   (c) $3X^4+X-1$ con $R=\mathbf{Q}[X]$;
   (d) 247 con $R=\mathbf{Z}$.

7. Fattorizzare i seguenti elementi dell'anello R in fattori irriducibili di R.
   (a) X^3-Y^3 con $R=\mathbf{Q}[X,Y]$;
   (b) X^3-X^2-8X+6 con $R=\mathbf{Z}[X]$;
   (c) X^4-X^2+4X+3 con $R=\mathbf{Q}[X]$;
   (d) $2i-9$ con $R=\mathbf{Z}[i]$.

8. Sia $f:A\longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli commutativi. Dimostrare che la mappa $f^*:\mathrm{Spec}(B)\longrightarrow\mathrm{Spec}(A)$ data da $f^*(\mathfrak{p})=f^{-1}(\mathfrak{p})$ è continua per la topologia di Zariski.

9. Sia R un dominio. Dimostrare che l'ideale $\{0\}$ è primo. Dimostrare che $\{0\}$ è un punto denso di $\mathrm{Spec}(R)$, nel senso che ogni aperto non vuoto contiene il punto $\{0\}$.

10. Dimostrare che per ogni anello commutativo R, lo spazio $\mathrm{Spec}(R)$, dotato dalla topologia di Zariski, è compatto.

11. Siano A,B due anelli commutativi. Siano $p:A\times B\longrightarrow A$ e $q:A\times B\longrightarrow B$ le due proiezioni, e siano $p^*:\mathrm{Spec}(A)\longrightarrow\mathrm{Spec}(A\times B)$ e $q^*:\mathrm{Spec}(B)\longrightarrow\mathrm{Spec}(A\times B)$ le due applicazioni indotte (quelle dell'Eserc. 8.).
   (a) Dimostrare che l'applicazione
   $$\mathrm{Spec}(A)\cup\mathrm{Spec}(B)\longrightarrow\mathrm{Spec}(A\times B)$$
   indotta da p^* e q^*, è un omeomorfismo.
   (b) Dimostrare che se A e B sono diversi dell'anello zero, allora $\mathrm{Spec}(A\times B)$ è sconnesso.