1. Sia R un anello commutativo. Dimostrare che (0) è ideale primo di R se e solo se R è un dominio.

2. Dimostrare che gli ideali primi non nulli di $\mathbf{Z}$ sono massimali.

3. Sia R l'anello $\mathbf{Z}[i]$ degli interi di Gauss.
   (a) Dimostrare che ogni ideale non nullo di R contiene un intero positivo.
   (b) Dimostrare che ogni ideale non nullo di R ha indice finito.
   (c) Dedurre che gli ideali primi non nulli di $\mathbf{Z}[i]$ sono massimali. (Sugg: Dimostrare che ogni dominio finito è un campo)

4. Sia p un primo e sia I_p l'ideale di $\mathbf{Z}[X]$ generato da X^2+1 e da p. Per $p = 2, 3$ e 5 decidere se I_p è primo, massimale o nessuno dei due.

5. Sia R il sottoanello $\{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbf{Z}\}$ di $\mathbf{C}$.
   (a) Esibire un isomorfismo dall'anello $\mathbf{Z}[X]/(X^2+5)$ a R
   (b) Dimostrare che l'ideale $(2, 1+\sqrt{-5})$ di R non è principale.
   (c) Dimostrare che l'elemento $1+\sqrt{-5}$ di R è irriducibile, ma non è primo. (Sugg. la norma $N : R \longrightarrow \mathbf{Z}$ data da $N(x) = x\overline{x}$ è moltiplicativa).

6. (Elementi irriducibili di $\mathbf{Z}[i]$)
   (a) Dimostrare che $\mathbf{Z}[i]^* = \{\pm 1, \pm i\}$.
   (b) Dimostrare che $i+1$ è un elemento irriducibile di $\mathbf{Z}[i]$.
   (c) Sia $p \equiv 3 \pmod 4$ un numero primo. Dimostrare che p è un elemento irriducibile di $\mathbf{Z}[i]$.
   (d) Si sa che per ogni primo $p \equiv 1 \pmod 4$ esistono $a, b \in \mathbf{Z}$ tali che $p = a^2 + b^2$. Dimostrare che $\pi = a + bi$ e $\overline{\pi} = a - bi$ sono elementi irriducibili di $\mathbf{Z}[i]$.
   (e) Dimostrare che un elemento irriducibile di $\mathbf{Z}[i]$ necessariamente divide qualche numero primo. Dedurne che, a meno di elementi invertibili, gli elementi irriducibili di $\mathbf{Z}[i]$ sono quelli che appaiono nelle parti (b), (c) e (d).

7. Sia $\mathbf{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss.
   (a) Fattorizzare gli elementi $5 + i$ e $239 + i$ come prodotto di elementi irriducibili di $\mathbf{Z}[i]$. (Sugg. prima fattorizzare le norme).
   (b) Dedurre la formula classica che John Machin ha usato nel 1706 per calcolare *a mano* i primi 100 decimali di π:

$$\pi = 16 \arctan\frac{1}{5} - 4 \arctan\frac{1}{239}, \qquad \text{con} \quad \arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

8. Sia R un anello commutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali coprimi, vale a dire $I + J = R$. Dimostrare che per ogni $m \geq 1$ si ha che $I^m + J^m = R$.