1. Un gruppo G si dice *semplice* se gli unici sottogruppi normali di G sono G e $\{e\}$. Dimostrare: se un gruppo semplice G ammette un sottogruppo di indice n, allora si ha che $\#G \leq n!$. (Sugg. considerare l'azione di G sull'insieme G/H delle classi laterali sinistre del sottogruppo H.)

2. Dimostrare che nei seguenti casi nessun gruppo di cardinalità n è semplice:
   (a) $n = 200$; (b) $n = 4p$ con p primo; (c) $n = 36$; (d) $n = 72$.
   (Sugg. usare la teoria di Sylow e l'esercizio 4.1.)

3. In questo esercizio dimostriamo che gruppi G di cardinalità 120 non possono essere semplici. Supponiamo quindi per assurdo che $\#G = 120$ e che gli unici sottogruppi normali di G siano $\{1\}$ e G stesso.
   (a) Dimostrare che G possiede sei 5-sottogruppi di Sylow.
   (b) Il gruppo G agisce tramite coniugio sull'insieme dei 5-sottogruppi di Sylow. Dimostrare che l'omomorfismo $G \longrightarrow S_6$ associato, è iniettivo e che l'immagine è contenuta in A_6.
   (c) Dimostrare che A_6 non ha sottogruppi di indice 3 (sfruttare la semplicità di A_6).
   (d) Dedurre una contraddizione e concludere che G non può esistere.

4. Sia G un gruppo finito.
   (a) Dimostrare che se G ha solo due classi di coniugio, allora $G \cong \mathbf{Z}_2$.
   (b) Dimostrare che se G ha tre classi di coniugio, allora $G \cong \mathbf{Z}_3$ oppure $G \cong S_3$.

5. Sia G un gruppo e sia $D = [G, G]$ il suo sottogruppo dei commutatori. Sia $f : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(D)$ la mappa data da $x \mapsto \sigma_x$ dove $\sigma_x(h) = xhx^{-1}$ per ogni $h \in D$.
   (a) Dimostrare che $f(D)$ è contenuto nel sottogruppo $\mathrm{Aut}(D)'$ dei commutatori di $\mathrm{Aut}(D)$.
   (b) Dimostrare che il sottogruppi $\mathrm{Inn}(D) \subset \mathrm{Aut}(D)$ degli automorfismi *interni* di D è contenuto in $\mathrm{Aut}(D)'$.
   (c) Dimostrare che il gruppo simmetrico S_3 non può essere sottogruppo dei commutatori di nessun gruppo.
   (d) Dimostrare che per $n \geq 3$ il gruppo diedrale D_n non può essere sottogruppo dei commutatori di nessun gruppo.

6. Sia G un gruppo finito e supponiamo che il 2-sottogruppo di Sylow di G sia ciclico.
   (a) Calcolare il segno della permutazione $G \longrightarrow G$ indotta dalla moltiplicazione a sinistra per un generatore di un 2-gruppo di Sylow.
   (b) Dimostare che G ammette un sottogruppo di indice 2 (e quindi G non è semplice).
   (c) Dimostrare che gli elementi di G di ordine dispari formano un sottogruppo caratteristico di G.

7.*Dimostrare che non esistono gruppi *semplici* non abeliani di ordine < 60. (Sugg. procedere caso per caso; usare i teoremi di Sylow)