1. Sia G un gruppo abeliano di cardinalità n . Dimostrare che per ogni divisore $m > 0$ di n , il gruppo G ammette un sottogruppo di cardinalità m .
2. Sia p un numero primo e sia q un divisore primo di $p - 1$. Sia

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{Z}_p \text{ con } b^q = 1 \right\},$$

sia $H \subset G$ il sottogruppo delle matrici con $a = 0$ e sia $N \subset G$ il sottogruppo delle matrici con $b = 1$.

- (a) Dimostrare che N è un sottogruppo normale di G .
 - (b) Dimostrare che G è isomorfo al prodotto semidiretto $N \rtimes H$.
3. Siano p e q due numeri primi. Dimostrare che ogni gruppo G di ordine pq ammette un sottogruppo normale diverso da G e da $\{1\}$.
 4. Sia ϕ l'unico omomorfismo suriettivo da $\mathbf{Z}_4$ ad $\text{Aut}(\mathbf{Z}_3)$. Sia B il prodotto semidiretto $\mathbf{Z}_3 \rtimes \mathbf{Z}_4$ associato a ϕ .
 - (a) Determinare gli elementi di ordine 2 di B .
 - (b) Dimostrare che B non è isomorfo né al gruppo diedrale D_6 né al gruppo alter-nante A_4 .
 5. Sia $G = \text{SL}_2(\mathbf{Z}_3)$. Quanti elementi ha G ? Decidere se il 2-sottogruppo di Sylow di G è isomorfo al gruppo diedrale D_4 oppure al gruppo dei quaternioni Q .
 6. Sia G un gruppo di ordine 33.
 - (a) Dimostrare che i sottogruppi di Sylow di G sono normali.
 - (b) Dimostrare che $G \cong \mathbf{Z}_{33}$. (Sugg. usare l'esercizio 2.2)
 7. Sia G un gruppo di ordine 45.
 - (a) Dimostrare che i sottogruppi di Sylow di G sono normali.
 - (b) Dimostrare che G è abeliano. (Sugg. usare l'esercizio 1.9)
 8. (a) Dimostrare che ogni gruppo di cardinalità 255 è ciclico.
 (b) Dimostrare che ogni gruppo di cardinalità 4225 è abeliano.
 9. Sia G un gruppo di cardinalità 56. Dimostrare che G ammette un 2-sottogruppo di Sylow normale oppure un 7-sottogruppo di Sylow normale. (Sugg. Se i 7-sottogruppi di Sylow non sono normali, determinare la cardinalità del complemento dell'unione dei 7-sottogruppi di Sylow).
 10. Sia G un gruppo e sia $\phi : G \rightarrow \text{Aut}(G)$ la mappa che manda $g \in G$ nell'automorfismo ϕ_g dato da $\phi_g(x) = gxg^{-1}$ per ogni $x \in G$. Sorprendentemente, il prodotto semidiretto $G \rtimes G$ (rispetto a ϕ) è *isomorfo* al prodotto cartesiano $G \times G$. Esibire un isomorfismo.