1. Siano H ed N sottogruppi di un gruppo G. Supponiamo che H normalizzi N.
   (a) Dimostrare che $HN = \{hn : h \in H \text{ e } n \in N\}$ è un sottogruppo di G.
   (b) Dimostrare che N è un sottogruppo normale di HN.
   (c) Dimostrare che l'inclusione $H \subset HN$ induce un isomorfismo di gruppi
$$H/(H \cap N) \cong HN/N.$$

2. Sia G un gruppo e siano N_1, N_2 due sottogruppi normali di G con la proprietà $N_1 \cap N_2 = \{e\}$.
   (a) Dimostrare che N_1 e N_2 commutano.
   (b) Dimostrare che l'insieme $N_1N_2 = \{xy : x \in N_1 \text{ e } y \in N_2\}$ è un sottogruppo di G. Dimostrare che N_1N_2 è isomorfo a $N_1 \times N_2$.

3. Sia G un gruppo. Dimostrare che un sottogruppo normale di G è unione disgiunta di classi di coniugio di G.

4. Scrivere presentazioni dei gruppi $\mathbf{Z}_{20}$, $\mathbf{Z}_{20}^*$ e del gruppo diedrale D_{20}.

5. Scrivere una presentazione del gruppo di Klein V_4. Scrivere una presentazione del gruppo alternante A_4 (Sugg: il gruppo A_4 ammette un sottogruppo normale isomorfo al gruppo di Klein).

6. Siano G ed H gruppi e sia $\phi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$ un'omomorfismo di gruppi. Dimostrare che l'applicazione $G \times H \longrightarrow H$ data da $(g, h) \mapsto \phi(g)(h)$ è un'azione di G su H.

7. Il gruppo S_4 agisce linearmente su $\mathbf{R}^4$ permutando i vettori della base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Cioè, si ha che $\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, per $i = 1, 2, 3, 4$. Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ dato da $V = \{(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbf{R}^4 : v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0\}$.
   (a) Dimostrare che S_4 preserva V.
   L'azione di S_4 ci dà quindi un'omomorfismo $\varrho : S_4 \longrightarrow \mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$.
   (b) Calcolare il polinomio caratteristico di $\varrho(\sigma)$, per $\sigma = (1\,2\,3)$ e $\sigma = (1\,2\,3\,4)$.

8. Sia G un gruppo finito di ordine $2n$, con n dispari. In questo esercizio dimostreremo che G ammette un sottogruppo di indice 2.
   (a) Per ogni $g \in G$, sia $t_g : G \longrightarrow G$ la *traslazione* per g, ossia $t_g(x) = gx$, per $x \in G$. Dimostrare che t_g è una permutazione di G.
   (b) Sia S_G il gruppo delle permutazioni degli elementi di G. Dimostrare che l'applicazione $G \longrightarrow S_G$, data da $g \mapsto t_g$, è un omomorfismo di gruppi.
   (c) Dimostrare che G ha un elemento x di ordine 2 e calcolare il segno della permutazione t_x.
   (d) Dimostrare che $H = \{g \in G : \text{il segno di } t_g \text{ è pari}\}$ è un sottogruppo di indice 2.

9. Sia p un numero primo.
   (a) Esibire un p-sottogruppo di Sylow di $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$.
   (b) Sia $n \geq 1$. Determinare la cardinalità del gruppo $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}_p)$.
   (c) Sia $n \geq 1$. Esibire un p-sottogruppo di Sylow di $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}_p)$.