1. Sia R un anello commutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali coprimi.
   (a) Dimostrare che $IJ = I \cap J$;
   (b) (Teorema cinese del resto) Dimostrare che la mappa naturale
   $$R/IJ \longrightarrow R/I \times R/J$$
   è un isomorfismo di anelli.
   (c) Generalizzare la parte (b) a n ideali $I_1, \ldots, I_n$ coprimi a due a due.

2. Sia R un anello commutativo con 1. Un elemento $e \in R$ un elemente si dice *idempotente.* se $e^2 = e$.
   (a) Determinare gli elementi idempotenti di $\mathbf{Z}_6$ e di $\mathbf{Z}_{100}$.
   (b) Dimostrare: se $e \in R$ è idempotente anche $1 - e$ lo è.
   (c) Dimostrare: sia $e \in R$ idempotente; dimostrare che la mappa naturale $R \longrightarrow R/(e) \times R/(1-e)$ è un isomorfismo di anelli.

3. Sia R un anello. Sia $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}[X], R)$ l'insieme degli omomorfismi di anelli da $\mathbf{Z}[X]$ in R. Dimostrare che la mappa $\phi : \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}[X], R) \longrightarrow R$ data da $\phi(g) = g(X)$ (per $g \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}[X], R)$), è una biiezione.

4. (a) Sia R un dominio e siano x, y due elementi di R can la proprietà che gli ideali (x) e (y) sono uguali. Dimostrare che esiste $u \in R^*$ con $ux = y$.
   (b) Sia $I \subset \mathbf{Z}[X]$ l'ideale generato da $5X$ e X^2 e sia $R = \mathbf{Z}[X]/I$. Dimostrare che R non è un dominio.
   (c) Indichiamo la mappa canonica $\mathbf{Z}[X] \longrightarrow R$ con $f \mapsto \overline{f}$. Dimostrare che gli ideali di R generati dagli elementi $\overline{X}$ e $\overline{2X}$ sono uguali, ma che *non* esiste nessuna unità $u \in R^*$ tale che $\overline{2X} = u\,\overline{X}$.

5. Sia R un anello commutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali coprimi, vale a dire $I + J = R$. Dimostrare che per ogni $m \geq 1$ si ha che $I^m + J^m = R$.

6. Sia $f \in \mathbf{Z}[X]$ un polinomio monico.
   (a) Se $\alpha \in \mathbf{Q}$ è uno zero di f, allora $\alpha \in \mathbf{Z}$.
   (b) Supponiamo che $f(2) = 13$. Dimostrare che f ha al più tre zeri distinti in $\mathbf{Q}$.
   (c) Esibire un polinomio f con tre zeri razionali distinti e che soddisfa $f(2) = 13$.

7. Per gli anelli finiti $R = \mathbf{Z}_{91}$, $\mathbf{Z}_{100}$, $\mathbf{Z}[i]/(9-2i)$ e $\mathbf{Z}_3[X]/(X^4-1)$, scrivere il gruppo moltiplicativo R^* come prodotto di gruppi ciclici.

8. Sia p primo e sia $k = \mathbf{F}_p(T)$ il campo delle funzioni razionali in T.
   (a) Dimostrare che il polinomio $X^p - T \in k[X]$ è irriducibile.
   (b) Sia $\alpha \in \overline{k}$ uno zero di $X^p - T$. Dimostrare che $X^p - T = (X - \alpha)^p$ in $k(\alpha)[X]$. Dimostrare che il campo di spezzamento di f su k è $k(\alpha)$.
   (c) Dimostrare che $k(\alpha)$ è isomorfo a k (non dico "uguale").

9. (a) Per ogni $n \leq 10$ diverso da 5 esibire un anello R con $\#R^* = n$.
   (b)*Dimostrare che non esiste un anello R con $\#R^* = 5$.