1. Sia X un insieme con un'azione del gruppo G. Sia $g \in G$, sia $x \in X$ e sia G_x lo stabilizzatore di x. Dimostrare che lo stabilizzatore di gx è uguale a gG_xg^{-1}.

2. Sia $\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ il semipiano superiore. Definiamo
$$\sigma(z) \;=\; \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \text{per } \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}).$$
   (a) Dimostrare che si tratta di un'azione di $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ su $\mathcal{H}$.
   (b) Dimostrare che l'azione è *transitiva*.
   (c) Determinare lo stabilizzatore di $i \in \mathcal{H}$.

3. (a) Sia G un gruppo. Dimostrare che due elementi coniugati di G hanno lo stesso ordine. Vale anche il viceversa?
   (b) Determinare le classi di coniugio del gruppo simmetrico S_4.
   (c) Stessa domanda per il sottogruppo alternante A_4.
   (d) Nelle parti (b) e (c) verificare che la cardinalità di ogni classe di coniugio divide la cardinalità del gruppo.

4. Sia G un gruppo e sia $H \subset G$ un sottogruppo con $[G : H] = n$. Dimostrare che H contiene un sottogruppo N, normale in G, con la proprietà che $[G : N]$ divide $n!$. (Sugg: considerare l'azione di G sulle classi laterali sinistre di H)

5. Sia $n \geq 2$. Sia $H \subset S_n$ un sottogruppo transitivo. In altre parole, l'azione di H su $\{1, 2, \ldots, n\}$ ha un'unica orbita.
   (a) Dimostrare che n divide $\#H$.
   (b) Dimostrare che H contiene un elemento senza punti fissi. (Sugg. usare la formula di Burnside.)

6. Sia $n \geq 1$ un numero naturale. Consideriamo delle collane con n perle di colore rosso o blu. Dimostrare che il numero di collane "essenzialmente diverse" è dato da
$$\frac{1}{2n}\sum_{d|n} \varphi(d)2^{n/d} + \begin{cases} 3 \cdot 2^{n/2-2}, & \text{se } n \text{ pari;} \\ 2^{(n-1)/2}, & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$
   Qua φ indica la funzione di Eulero.

7. Un *tetraedro italiano* è un tetraedro regolare con faccie di colore bianco, rosso o verde. Quanti tetraedri italiani *essenzialmente diversi* ci sono? (Sugg. il gruppo delle rotazioni dello spazio che preservano un tetraedro regolare è isomorfo al gruppo alternante A_4).

8. Un *cubo olandese* è un cubo con faccie di colore rosso, bianco o blu. Poichè ogni faccia può avere uno qualunque dei tre colori, ci sono a priori $3^6 = 729$ cubi possibili. Però, tanti di questi cubi sono "lo stesso cubo" nel senso che possono essere portati uno nell'altro mediante una opportuna rotazione. Per esempio, da questo punto di vista, tutti i cubi con cinque faccie rosse e una faccia bianca sono lo stesso cubo.

   Quanti cubi olandesi essenzialmente diversi ci sono? (Sugg. il gruppo delle rotazioni dello spazio che preservano un cubo è isomorfo al gruppo simmetrico S_4).

9. Sia p un numero primo.
   (a) Dimostrare che il centro di un gruppo finito di ordine una potenza di p non è banale.
   (b) Dimostrare che ogni gruppo di ordine p^2 è abeliano.