COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia G un gruppo. Dimostrare che ogni sottogruppo normale di G è unione di classi di coniugio di G.
2. Sia $n \geq 1$. Dimostrare che ogni elemento del gruppo simmetrico S_n è coniugato al suo inverso.
3. Sia G un gruppo e sia $H \subset G$ il sottogruppo generato dagli elementi di G di ordine finito.
   (a) Dimostrare che H è un sottogruppo normale di G.
   (b) Dimostrare che il gruppo quoziente G/H non contiene elementi non banali di ordine finito.
4. Sia R un anello commutativo con 1 e sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di R. Dimostrare che $\mathfrak{p}$ è un punto chiuso di $\mathrm{Spec}(R)$ se e e solo se $\mathfrak{p}$ è un ideale massimale di R.
5. Sia $I \subset \mathbf{Z}[X]$ l'ideale generato da 3 e X. Determinare la cardinalità dell'anello quoziente $\mathbf{Z}[X]/I^2$.
6. Quanti polinomi irriducibili di grado 6 ci sono in $\mathbf{F}_2[X]$?

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 9 del foglio 1.
2. Ogni $\sigma \in S_n$ è prodotto di cicli disgiunti C_i . Poiché i cicli C_i commutano, la permutazione σ^{-1} è prodotto dei cicli disgiunti C_i^{-1}. In particolare, le lunghezze dei cicli disgiunti sono le stesse. Questo implica che σ e σ^{-1} sono coniugati.
3. (b) Sia $g \in G$. Supponiamo che la classe $\overline{g}$ abbia ordine n in G/H. Allora $g^n \in H$. Per definizione di H, l'elemento g^n ha ordine finito m in G. Ne segue che $g^{nm} = e$. Questo implica che $g \in H$ e quindi $\overline{g}$ è l'elemento banale di G/H.
4. Questo è l'esercizio 7 del foglio 4.
5. L'ideale I^2 è uguale a $(X^2, 3X, 9)$. Questo implica che ogni classe di $\mathbf{Z}[X]/I^2$ è rappresentata da un polinomio della forma $aX + b$ con $0 \leq a < 3$ e $0 \leq b < 9$. In particolare, $\mathbf{Z}[X]/I^2$ ha 27 elementi.
6. Ogni polinomio irriducibile di grado 6 ha sei zeri distinti in $\mathbf{F}_{64}$. Viceversa, ogni elemento di $\mathbf{F}_{64}$, non contenuto in un sottocampo proprio, ha polinomio minimo in $\mathbf{F}_2[X]$ di grado 6. Poiché i sottocampi propri di $\mathbf{F}_{64}$ sono $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_4$ e $\mathbf{F}_8$, ci sono $2^6 - 2^3 - 2^2 + 2 = 54$ elementi di questo tipo. Ci sono quindi $54/6 = 9$ polinomi irriducibili di grado 6.