Algebra 2 (Schoof) 4^o appello 19 luglio 2018, ore 10:00–12:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia p un numero primo e sia G un gruppo di cardinalità una potenza di p. Dimostrare che il centro di G è un gruppo non banale.
2. Siano p e q due numeri primi. Dimostrare che un gruppo di cardinalità pq non può essere semplice.
3. Sia p un numero primo. Sia $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_p)$ il gruppo delle matrici invertibili con coefficienti in $\mathbf{F}_p$ *modulo* il sottogruppo delle matrici scalari. Sia $x \in \mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_7)$ la classe laterale della matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare l'ordine di x in $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_7)$.
4. Dimostrare che gli ideali primi non nulli di $\mathbf{Z}$ sono massimali.
5. Sia p un numero primo, sia $a \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ e sia $q = p^a$.
   (a) Dimostrare che l'applicazione $f : \mathbf{F}_q \longrightarrow \mathbf{F}_q$, data da $f(x) = \sum_{i=0}^{a-1} x^{p^i}$, è un omomorfismo di gruppi additivi.
   (b) Dimostrare che il nucleo di f è uno $\mathbf{F}_p$-spazio vettoriale di dimensione $< a$.
   (c) Dimostrare che l'immagine di f è il sottocampo $\mathbf{F}_p$ di $\mathbf{F}_q$.
6. Sia R un anello commutativo con 1. L'*annullatore* $\mathrm{Ann}(x)$ di un elemento $x \in R$ è definito da $\mathrm{Ann}(x) = \{y \in R : xy = 0\}$.
   (a) Sia $x \in R$. Dimostrare che $\mathrm{Ann}(x)$ è un ideale di R.
   (b) Sia $R = \mathbf{Z}_{120}$. Determinare un generatore di $\mathrm{Ann}(\overline{28})$.
   (c) Sia $R = \mathbf{Z}_3[X]/(X^2 - X + 1)$ e sia $\overline{X+1} \in R$ la classe laterale di $X + 1$. Determinare l'indice $[R : \mathrm{Ann}(\overline{X+1})]$.

Soluzioni.

1. Questo è l'eserczio 9 del foglio 1.
2. Se $p = q$, allora il gruppo ha cardinalità p^2 e non è semplice per il primo esercizio del compito. Se $p \neq q$ possiamo supporre che $p < q$. Il numero N di q-sottogruppi di Sylow divide p ed è congruo a 1 (mod q). Ne segue che $N = 1$ e che il q-sottogruppo di Sylow è normale. E quindi il gruppo non è semplice.
3. Il quadrato della matrice è $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e la quarta potenza è la matrice scalare $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Concludiamo che l'ordine è 4.
4. Questo è l'eserczio 2 del foglio 5.
5. (b) Se $x \in \ker f$ e $\lambda \in \mathbf{F}_p$, anche $\lambda x \in \ker f$, perché $\lambda^p = \lambda$. Poichè il polinomio $X + X^p + X^{p^2} + \ldots X^{p^{a-1}}$ ha $\leq p^{a-1}$ radici, il nucleo di f ha $\leq p^{a-1}$ elementi e ha quindi dimensione $\leq a - 1$. (c) Per ogni $x \in \mathbf{F}_q$ si ha che $f(x)^p = f(x)$. Questo implica che gli elementi dell'immagine sono zeri del polinomio $X^p - X$ e appartengono quindi a $\mathbf{F}_p$. Per la parte (b), l'immagine di f ha cardinalità almeno $p^a/p^{a-1} = p$. Cè quindi uguaglianza.
6. (b) Poiché $\overline{7}$ è invertibile in $\mathbf{Z}_{120}$, l'annullatore cercato è uguale all'annullatore di $28/7 = 4$, il quale è generato dalla classe di $120/4 = 30$. (c) L'annullatore è l'ideale generato dalla classe di $(X^2 - X + 1)/(X + 1) = X + 1$. Il suo indice in $\mathbf{Z}_3[X]/(X^2 - X + 1)$ è 3.