Algebra 2 (Schoof) — 3^o appello — 21 giugno 2018, ore 11:00–13:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia p un primo. Dimostrare che un gruppo di cardinalità $4p$ non può essere semplice.
2. Sia $G = \mathbf{Z}_{65}^*$ e sia H il sottogruppo $\{\pm\overline{1}\}$. Sia h la classe laterale $\overline{2}H$. Determinare l'ordine dell'elemento $h \in G/H$.
3. Sia $X = \{1, 2, 3\}$. Allora il gruppo S_3 agisce sull'insieme delle parti $P(X)$ di X, tramite $\sigma(Y) = \{\sigma(y) : y \in Y\}$, per $Y \subset X$ e $\sigma \in S_3$. Determinare le cardinalità delle orbite di quest'azione.
4. Sia $I \subset \mathbf{Z}[X]$ l'ideale generato dagli elementi X^2 e 3. Determinare la cardinalità dell'anello quoziente $\mathbf{Z}[X]/I^2$.
5. Determinare il grado di un campo di spezzamento del polinomio $X^{11}-1$ sul campo $\mathbf{F}_3$.
6. Sia R un anello commutativo con 1 e sia $e \in R$ un elemento *idempotente*, cioè per cui vale $e^2 = e$.
   (a) Dimostrare che anche $1 - e$ è un elemento idempotente di R.
   (b) Dimostrare che la mappa naturale $R \longrightarrow R/(e) \times R/(1-e)$ è un isomorfismo di anelli.

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 2 (b) del foglio 4.
2. Poiché $\overline{2}^6 = \overline{64} = -\overline{1}$, l'ordine di $h \in G/H$ è 6.
3. Poiché S_3 agisce doppiamente transitivamente su X, le orbite sono i sottoinsiemi C_k di $P(X)$ che contengono i sottoinsiemi $Y \subset X$ di cardinalità k. La cardinalità di C_k è $\binom{3}{k}$. Le orbite hanno quindi cardinalità rispettivamente $1, 3, 3$ e 1.
4. Si ha che $I^2 = (9, 3X^2, X^4)$. L'anello $\mathbf{Z}[X]/I^2$ ha quindi $9 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729$ elementi.
5. Sia k un campo di spezzamento di $X^{11} - 1$ su $\mathbf{F}_3$. Allora k ha 3^a elementi, dove $a > 0$ è il più piccolo numero naturale tale che k^* contiene un elemento di ordine 11. Questo vuol dire che 11 divide $\#k^* = 3^a - 1$ e che a è l'ordine di 3 modulo 11. Abbiamo quindi che $a = 5$.
6. Questo è l'esercizio 2 del foglio 12.