Algebra 2 (Schoof) 2^o appello 16 febbraio 2018, ore 10:00–12:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia G un gruppo e sia $f : G \longrightarrow G$ la biiezione data da $f(x) = x^{-1}$, per $x \in G$. Dimostrare che G è abeliano se e solo se f è un automorfismo di G.
2. Sia p un primo e sia G il gruppo moltiplicativo delle matrici dato da $G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbf{Z}_p^* \text{ e } b \in \mathbf{Z}_p\}$. È risolubile G? Spiegare la risposta.
3. Sia $k = \mathbf{F}_{16}$ e sia $\phi : k \longrightarrow k$ l'automorfismo (di Frobenius) dato da $\phi(x) = x^2$, per $x \in k$. Allora il gruppo generato da ϕ agisce su k. Quante orbite ci sono?
4. Sia A un anello commutativo con 1 e sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di A. Dimostrare che l'ideale $\mathfrak{p}$ è massimale se e solo se $\mathfrak{p}$ è un punto chiuso di $\mathrm{Spec}(A)$.
5. Sia K il sottocampo di $\mathbf{R}$ dato da $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{6})$. Determinare il grado $[K : \mathbf{Q}]$.
6. Determinare i gradi dei fattori irriducibili del polinomio $X^{19} - 1$ in $\mathbf{F}_7[X]$.

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 3 del foglio 11.
2. Il sottogruppo H delle matrici con $a = 1$ è ciclico ed è normale in G. Poichè anche il quoziente $G/H \cong \mathbf{Z}_p^*$ è ciclico, il gruppo G è risolubile.
3. L'automorfismo ϕ fissa il sottocampo $\mathbf{F}_2$ e scambia i due elementi di $\mathbf{F}_4 - \mathbf{F}_2$. Si tratta di tre orbite. L'insieme $\mathbf{F}_{16} - \mathbf{F}_4$ ha $16 - 4 = 12$ elementi ed è unione di tre orbite di lunghezza 4. Ci sono quindi 6 orbite.
4. Questo è l'esercizio 4 del foglio 7.
5. Poiché 4 è un quadrato in $\mathbf{Q}$ e $\sqrt{6}$ è uguale a $\sqrt{2}\sqrt{3}$, si ha che $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Il grado $[K : \mathbf{Q}]$ è 4, perché 3 non è un quadrato in $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.
6. Si ha che $7^3 \equiv 1 \pmod{19}$. Il campo $\mathbf{F}_{7^3}$ contiene quindi le 19-esime radici dell'unità. Il polinomio $X^{19} - 1$ ha il fattore $X - 1$ di grado 1. Poiché 19 non divide $6 = \#\mathbf{F}_7^*$, gli altri fattori irriducibili hanno grado 3. Ce ne sono sei.