Algebra 2 (Schoof) 1^o appello 31 gennaio 2018, ore 10:00–12:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia G un gruppo e siano N_1, N_2 due sottogruppi normali di G. Dimostrare che l'insieme $N_1N_2 = \{xy : x \in N_1 \text{ e } y \in N_2\}$ è un sottogruppo di G. Se $N_1 \cap N_2 = \{e\}$, dimostrare che N_1N_2 è isomorfo a $N_1 \times N_2$.
2. Dimostrare che un gruppo di cardinalità 1000000 non può essere semplice.
3. Sia $n \geq 1$ e sia S_n il gruppo simmetrico su n simboli. Dimostrare che ogni elemento di S_n è coniugato al suo inverso.
4. Sia $f = X^3 + X^2Y + XY + Y^2 + 2Y$. Dire se, come elemento dell'anello $\mathbf{R}[X, Y]$, il polinomio f è irriducibile o meno. Stessa domanda, ma considerando f come elemento dell'anello $\mathbf{Z}_2[X, Y]$.
5. Dimostrare che un ideale primo non nullo di un dominio ad ideali principali è massimale.
6. Determinare il grado del campo di spezzamento di $X^4 - 2$ su $\mathbf{Q}$.

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 2 del foglio 2.
2. Sia G un gruppo semplice con $\#G = 1000000 = 2^6 5^6$. Il numero di 5-sottogruppi di Sylow di G può essere 1 oppure 16. Nel primo caso l'unico 5-sottogruppo di Sylow è normale. Contraddizione. Nel secondo caso l'azione di G sui 5-gruppi di Sylow ci dà un omomorfismo non banale $f : G \longrightarrow S_{16}$. Poichè $\#S_{16} = 16!$ non è divisibile per 1000000, il nucleo di f è un sottogruppo normale non banale di G. Contraddizione.
3. Scriviamo σ come prodotto di cicli disgiunti di lunghezze $a_1, \ldots, a_t$. Poiché le lunghezze di un ciclo e del suo inverso, sono uguali, anche σ^{-1} è prodotto di cicli disgiunti di lunghezze $a_1, \ldots, a_t$. Ne segue che σ e σ^{-1} sono coniugati in S_n.
4. Vediamo f come elemento di $A[X]$ con $A = \mathbf{R}[Y]$. Allora $f = X^3 + YX^2 + YX + (Y^2 + 2Y)$ è un polinomio di Eisenstein rispetto all'elemento primo Y di A. Invece nell'anello $\mathbf{F}_2[X, Y]$, abbiamo che $f = (X^2 + Y)(X + Y)$ e quindi f è riducibile.
5. Sia A un PID e sia I un ideale primo e sia π un generatore di I. Allora $\pi \neq 0$. Sia J un ideale con $I \subset J \subset A$. Sia α un generatore di J. Allora $\alpha\beta = \pi$ per qualche $\beta \in A$. Se π divide α allora si ha che $I = J$. Quindi, per forza π divide β e $\beta = \gamma\pi$ per qualche β. Questo implica che $\alpha\gamma\pi = \pi$ e quindi $\alpha\gamma = 1$. Ne segue che α è invertibile e quindi $J = R$. Concludiamo che I è massimale.
6. Questo è l'esercizio 1 del foglio 9.