1. Determinare l'ordine di ogni elemento del gruppo diedrale $D_4$. Stessa domanda per il gruppo moltiplicativo $\mathbf{Z}_{16}^*$.

2. Sia $G$ un gruppo finito di cardinalità $n$. Dimostrare che $G$ è ciclico se e solo se esiste un elemento $g \in G$ di ordine $n$.

3. Sia $G$ un gruppo e sia $x \in G$ un elemento di ordine $n$. Dimostrare che per ogni $y \in G$ l'elemento $yxy^{-1}$ ha anche ordine $n$.

4. Sia $p > 2$ un numero primo e sia $T_p = \frac{1}{2}(3^p - 1)$.
   (a) Dimostrare che $T_p$ non è primo se $p$ non è primo.
   Supponiamo che $p$ sia primo. Sia $q$ un divisore primo di $T_p$.
   (b) Dimostrare che $\overline{3} \in \mathbf{Z}_q^*$ ha ordine $p$.
   (c) Dimostrare che $q \equiv 1 \pmod{p}$.
   (d) Dimostrare che $T_p$ è primo per $p = 3$ e $p = 7$, ma non per $p = 5$ e $p = 11$.

5. Sia $n \in \mathbf{Z}_{>1}$.
   (a) Per $n = 2, 3, 4, 5$ fattorizzare $n^4 + 1$ in fattori primi.
   (b) Sia $m = n^4 + 1$. Dimostrare che $\overline{n} \in \mathbf{Z}_m^*$ ha ordine 8.
   (c) Dimostrare che ogni divisore primo $q > 2$ di $n^4 + 1$ soddisfa $q \equiv 1 \pmod{8}$.

6. Dimostrare che le seguenti applicazioni sono omomorfismi ben definiti:
   (a) $\mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}^*$ $\quad x \mapsto |x|$,
   (b) $\mathbf{Z}_{10} \longrightarrow \mathbf{Z}_5$ $\quad x \pmod{10} \mapsto x \pmod{5}$,
   (c) $\mathbf{Z}_{10}^* \longrightarrow \mathbf{Z}_5^*$ $\quad x \pmod{10} \mapsto x \pmod{5}$,
   (d) $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}^*$ $\quad x \mapsto \cos(x) + \mathrm{sen}(x)i$,
   (e) $\mathbf{Z}_4 \longrightarrow \mathbf{Z}_5^*$ $\quad x \mapsto 2^x$.
   (f) $\mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{R}^*$ $\quad a + bi \mapsto a^2 + b^2$,
   Quali sono iniettive e quali suriettive? Determinare i nuclei e le immagini.

7. Sia $f : G \longrightarrow H$ un'omomorfismo di gruppi. Sia $g \in G$ un elemento di ordine $m$. Dimostrare che l'ordine dell'elemento $f(g)$ di $H$ divide $m$.

8. Sia $G$ un gruppo e sia $g \in G$.
   (a) Dimostrare che l'applicazione data da $x \mapsto gxg^{-1}$ è un automorfismo di $G$.
   (b) Sia $H \subset G$ un sottogruppo. Dimostrare che $gHg^{-1} = \{gxg^{-1} : x \in H\}$ è un sottogruppo di $G$.

9. Sia $G$ un gruppo. Dimostrare che l'applicazione $F : G \longrightarrow G$ data da $F(x) = x^2$ è un omomorfismo se e soltanto se $G$ è abeliano. Dimostrare che l'applicazione $x \mapsto x^{-1}$ è un omomorfismo se e soltanto se $G$ è abeliano.

10. Provare che il gruppo moltiplicativo $\mathbf{Z}_{12}^*$, il gruppo diedrale $D_2$ e il gruppo $P(X)$ sono tutti isomorfi. Qua $P(X)$ indica l'insieme delle parti di $X = \{0, 1\}$ con composizione la differenza simmetrica.