1. Una trasformazione *affine* di $\mathbf{R}$ è una applicazione $A : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ data da
$$x \mapsto ax + b, \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R},$$
per qualche $a \in \mathbf{R}^*$ e $b \in \mathbf{R}$. Dimostrare che le trasformazioni affini di $\mathbf{R}$ formano un gruppo con la composizione. Si tratta di un gruppo commutativo?

2. Determinare quali sottoinsiemi sono sottogruppi:
   (a) $\{x \in \mathbf{Q} : x > 0\} \subset \mathbf{Q}^*$,
   (b) $\{x \in \mathbf{R} : x > 1\} \subset \mathbf{R}^*$,
   (c) $\{\pm 1, \pm i\} \subset \mathbf{C}^*$,
   (d) $\{\overline{x} \in \mathbf{Z}_n^* : x \equiv 1 \pmod{d}\} \subset \mathbf{Z}_n^*$ per d un divisore di n,
   (e) il gruppo diedrale D_n del gruppo ortogonale O_2,
   (f) $\{x \in \mathbf{Q}^* :$ esistono $a, b \in \mathbf{Q}$ tali che $x = a^2 + b^2\} \subset \mathbf{Q}^*$.

3. Per $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ sia D_n il gruppo diedrale. Dimostrare che D_d è un sottogruppo di D_n se e solo se d divide n.

4. Dimostrare che un sottogruppo di un gruppo abeliano è abeliano. Dare un esempio di un gruppo non abeliano con sottogruppo abeliano non banale.

5. (a) Sia G un gruppo e sia $\{H_\alpha : \alpha \in A\}$ una famiglia di sottogruppi di G. Dimostrare che $\cap_\alpha H_\alpha = \{h : h \in H_\alpha \quad \text{per ogni } \alpha \in A\}$ è un sottogruppo di G.
   (b) Sia G un gruppo e siano $H \subset G$ e $H' \subset G$ due sottogruppi. Dimostrare: se $G = H \cup H'$ allora $G = H$ oppure $G = H'$.
   (c) Provare che il gruppo $G = \mathbf{Z}_{12}^*$ ha *tre* sottogruppi H_1, H_2 e H_3 diversi da G ma con $H_1 \cup H_2 \cup H_3 = G$.

6. Esprimere le seguenti permutazioni nel gruppo simmetrico S_9 come prodotti di cicli disgiunti. Calcolare gli inversi.
$$\text{(a)} \quad \sigma : \begin{cases} 1 \mapsto 9, & 4 \mapsto 1, \quad 7 \mapsto 2, \\ 2 \mapsto 7, & 5 \mapsto 3, \quad 8 \mapsto 5, \\ 3 \mapsto 8, & 6 \mapsto 4, \quad 9 \mapsto 6. \end{cases} \qquad \text{(b)} \quad \tau : \begin{cases} 1 \mapsto 8, & 4 \mapsto 6, \quad 7 \mapsto 9, \\ 2 \mapsto 2, & 5 \mapsto 5, \quad 8 \mapsto 1, \\ 3 \mapsto 3, & 6 \mapsto 4, \quad 9 \mapsto 7. \end{cases}$$

7. Scrivere la permutazione $(1\,9\,6\,4\,3\,8\,7)(1\,3\,7\,4\,8\,6\,2)(2\,7\,1)$ come prodotto di cicli disgiunti.

8. Siano σ, τ permutazioni nel gruppo simmetrico S_n.
   (a) Sia $a \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e sia $b = \tau(a)$. Far vedere che la permutazione $\sigma\tau\sigma^{-1}$ manda $\sigma(a)$ in $\sigma(b)$.
   (b) Se $\tau = (a_1\, a_2\, \ldots\, a_k)$ è un k-ciclo, allora $\sigma\tau\sigma^{-1}$ è il ciclo $(\sigma(a_1)\, \sigma(a_2)\, \ldots\, \sigma(a_k))$.
   (c) Dimostrare che se τ è un prodotto di t cicli disgiunti di lunghezze $k_1, k_2, \ldots, k_t$, allora questo è vero anche per $\sigma\tau\sigma^{-1}$.

9. Siano $\sigma, \tau \in S_n$. Dimostrare che se la permutazione $\sigma\tau$ è un prodotto di t cicli disgiunti di lunghezze $k_1, k_2, \ldots, k_t$, allora questo è vero anche per $\tau\sigma$.