1. Sia R un anello commutativo. Dimostrare che
$$I = \{f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots \in R[X] : a_0 = a_1 = a_2 = 0\}$$
è un ideale di $R[X]$.

2. Sia R un anello commutativo. Una *seria formale* nella variabile X con coefficienti in R è un'espressione del tipo $\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ con $a_k \in R$ per ogni $k \geq 0$. Se $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ e $g = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k$, allora $f = g$ se e solo $a_k = b_k$ per ogni k. La somma di f e g è data da $f + g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k$ con $c_k = a_k + b_k$ per ogni k e il prodotto da $fg = \sum_{k=0}^{\infty} d_k X^k$ con $d_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$ per ogni k.
   (a) Dimostrare che le serie formali con coefficienti in R formano un anello commutativo. Notazione: $R[[X]]$.
   (b) Dimostrare che l'anello dei polinomi $R[X]$ è un sottoanello di $R[[X]]$.
   (c) Sia $f \in R[[X]]$. Dimostrare che $f \in R[[X]]^*$ se e solo se $f(0) \in R^*$

3. Sia R un anello e supponiamo che l'applicazione $f : R \longrightarrow R$ data da $f(x) = x^2$ sia un omomorfismo di anelli.
   (a) Dimostrare che R è un anello commutativo.
   (b) Dimostrare che per ogni $x \in R$ si ha $x + x = 0$.
   (c) Dimostrare che se $x \in \ker(f)$, allora $1 + x \in R^*$.

4. Sia $\mathbf{R}$ il campo dei numeri reali e sia A l'anello $\mathbf{R}[X]/(X^2)$. Sia $\phi : \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R} \times A$ l'applicazione data da $\phi(g) = (g(1), \overline{g})$ per $g \in \mathbf{R}[X]$. Qua $\overline{g} \in A$ indica la classe modulo X^2 di g.
   (a) Dimostrare che ϕ è un omomorfismo suriettivo di anelli.
   (b) Esibire un generatore del nucleo di ϕ.

5. Siano $a, b \in \mathbf{Z}_{>0}$ due interi coprimi.
   (a) Per $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ dimostrare che anche a^n e b^n sono coprimi.
   (b) Supponiamo che $ab = c^m$ per qualche $c \in \mathbf{Z}$ ed esponente $m \geq 1$. Dimostrare che sia a che b sono m-esima potenza in $\mathbf{Z}$.

6. Sia R un anello comutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali coprimi (questo vuol dire che $I + J = R$).
   (a) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ gli ideali I^n e J^n sono anche coprimi.
   (b) Supponiamo che $IJ = K^m$ per un ideale K e un esponente $m \geq 1$. Dimostrare che sia I che J è m-esima potenza di qualche ideale di R.

7. Determinare le cardinalità dei seguenti anelli:
   (a) $\mathbf{Z}[X]/(X^3 + X + 1, X - 1, 3)$;
   (b) $\mathbf{Z}[X, Y]/(Y^2 - X, Y - 3X, X - 2)$;
   (c) $\mathbf{Z}_3[X, Y, Z]/(Y^2 - X^2, Y - Z^3, X - Z)$;
   (d) $\mathbf{Z}[i]/(12 - i, 29)$.

8. Sia $I \subset \mathbf{Z}[X]$ l'ideale generato dai polinomi $X^2 - 1$ e $X^2 + 1$. Quanti sono gli elementi invertibili dell'anello quoziente $\mathbf{Z}[X]/I$?

9. Sia $I \subset \mathbf{Z}[X, Y]$ l'ideale generato generato da $X^2 - Y$, $Y - 1$ e 3. Calcolare la cardinalità del gruppo degli elementi invertibili del anello quoziente $\mathbf{Z}[X, Y]/I$.