

1. Scrivere ogni intero  $n = 22, 23, \dots, 33$  come somma di quattro quadrati di numeri interi. Se possibile scrivere  $n$  come somma di tre quadrati. Se possibile scrivere  $n$  come somma di due quadrati.
2. Sia  $m$  un intero congruo a 7 (mod 8). Dimostrare che  $m$  non è somma di tre quadrati di numeri interi. Dimostrare che per ogni  $a \geq 0$ , il numero  $4^a m$  non è somma di tre quadrati di numeri interi (infatti, ogni numero intero  $m > 0$  che *non* è di questo tipo è somma di tre quadrati (Legendre 1797)).
3. Trovare un quaternione intero  $y$  più vicino possibile al quaternione  $x = \frac{1+3i-j+5k}{2}$ . Calcolare la norma  $N(x - y)$
4. Sia  $p > 2$  un primo. Sia  $R$  l'anello  $\mathbf{Z}_p[X]/(X^2 + 1)$ .
  - (a) Determinare  $\#R^*$  (la risposta dipende dalla classe di  $p$  (mod 4)).
  - (b) Dimostrare che l'applicazione  $\phi : R^* \rightarrow \mathbf{Z}_p^*$  data da  $a + bX \mapsto a^2 + b^2$  è un omomorfismo di gruppi.
  - (c) Dimostrare che  $\phi$  è suriettivo.
  - (d) Dato  $t \in \mathbf{Z}_p^*$ , quante copie  $(a, b) \in \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$  con  $a^2 + b^2 = t$  ci sono? (Sugg: La risposta dipende solo da  $p$  e non da  $t$ ).
5. Scrivere  $X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2$  come polinomio nei polinomi simmetrici elementari  $s_1, s_2, s_3 \in \mathbf{Z}[X, Y, Z]$ . Stessa domanda per  $XY^3 + YX^3 + XZ^3 + ZX^3 + ZY^3 + YZ^3$ .
6. Siano  $\alpha, \beta, \gamma$  gli zeri complessi del polinomio  $X^3 + X^2 + 1$ . Determinare l'intero
 
$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$
7. Siano  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7 \in \mathbf{C}$  tali che  $X^7 + X + 2 = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_7)$ .
  - (a) Determinare  $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_7$ ;
  - (b) Dimostrare che  $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \cdots + \alpha_7^3 = 0$ ;
  - (c) Determinare  $\alpha_1^7 + \alpha_2^7 + \cdots + \alpha_7^7$ .
8. (Fibonacci) Siano  $\alpha$  e  $\beta$  gli zeri del polinomio  $X^2 - X - 1$ .
  - (a) Calcolare  $F_k = (\alpha^k - \beta^k)/(\alpha - \beta)$  per  $0 \leq k \leq 4$ .
  - (b) Dimostrare che  $F_k$  sta in  $\mathbf{Z}$  per ogni  $k \geq 0$ .
  - (c) Dimostrare che  $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$  per ogni  $k \geq 1$ .
9. Siano  $a, b, c \in \mathbf{Z}$  e siano  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  gli zeri complessi del polinomio  $f = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbf{Z}[X]$ .
  - (a) Determinare la funzione simmetrica  $(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_3)$  in termini dei coefficienti di  $f$ .
  - (b) Determinare la funzione simmetrica  $(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_3) + (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_3)$  in termini dei coefficienti di  $f$ .
  - (c) Determinare il polinomio monico cubico  $g \in \mathbf{Z}[X]$  che ha  $\alpha_1 + \alpha_2$ ,  $\alpha_2 + \alpha_3$  e  $\alpha_1 + \alpha_3$  come zeri. Esprimere i coefficienti in termini di  $a, b, c$ .
10. Calcolare il risultante di  $X^4 - 1$  e  $X^3 + 1$ . Stessa domanda per  $X^4 - 1$  e  $X^3 - 1$ .
11. Calcolare il discriminante del polinomio  $X^7 + X + 1$ .