

1. Dire se i seguenti sottoinsiemi sono ideali o meno:
 - (a) \mathbf{R} di \mathbf{C} ;
 - (b) $\{f \in \mathbf{Z}[X] : f(0) = 1\}$ di $\mathbf{Z}[X]$;
 - (c) $\{a + bi \in \mathbf{Z}[i] : a \text{ e } b \text{ hanno la stessa parità}\}$ di $\mathbf{Z}[i]$.
 - (d) $\{\bar{a} \in \mathbf{Z}_{289} : \bar{a} \text{ è divisore di zero}\}$ di \mathbf{Z}_{289} .
2. Siano A e B due anelli commutativi.
 - (a) Dimostrare che $A \times \{0\}$ e $\{0\} \times B$ sono ideali dell'anello prodotto $A \times B$.
 - (b) Calcolare somma, prodotto e intersezione degli ideali della parte (a).
3. Siano A e B due anelli commutativi.
 - (a) Siano $I \subset A$ e $J \subset B$ ideali. Dimostrare che $I \times J$ è un ideale di $A \times B$.
 - (b) Dimostrare che ogni ideale di $A \times B$ ha la forma $I \times J$ dove I è un ideale di A e J è un ideale di B .
4. Sia R un anello commutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali di R . Dimostrare che $I \cup J$ è un ideale se e soltanto se $I \subset J$ oppure $J \subset I$.
5. Siano I, J ideali di un anello commutativo A . Dimostrare che se $I + J = A$, allora $IJ = I \cap J$.
6. Dimostrare che l'ideale (X, Y) dell'anello $\mathbf{Q}[X, Y]$ non è principale.
7. Sia R l'anello $\mathbf{Z}[X]$, sia I l'ideale generato da $X^2 + 2$ e sia J l'ideale $(4, X)$.
 - (a) Dimostrare che l'anello R/I è infinito.
 - (b) Dimostrare che l'anello quoziente R/J ha quattro elementi.
 - (c) Sia K l'ideale $I + J$. L'anello R/K , quanti elementi ha?
 - (d) Sia L l'ideale J^2 (cioè $J \cdot J$). L'anello R/L , quanti elementi ha?
8. Sia $f : A \rightarrow B$ un omomorfismo di anelli commutativi. Dimostrare che l'applicazione $\varphi : A/\ker f \rightarrow f(A)$ definita da $\varphi(\bar{x}) = f(x)$ è un isomorfismo di anelli ben definito.
9. (a) Dimostrare che la mappa $\Psi : \mathbf{Z}[X] \rightarrow \mathbf{Z}_2$ data da $f \mapsto f(0) \pmod{2}$ è un omomorfismo di anelli suriettivo.
 - (b) Dimostrare che $\ker(\Psi)$ è l'ideale $(2, X)$.
 - (c) Dimostrare che c'è un isomorfismo

$$\mathbf{Z}[X]/(2, X) \cong \mathbf{Z}_2.$$

10. Sia R l'insieme delle successioni $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ con $a_k \in \mathbf{Q}$ per ogni $k \geq 1$, con somma e prodotto definiti come segue: $\{a_k\}_{k=1}^\infty + \{b_k\}_{k=1}^\infty = \{a_k + b_k\}_{k=1}^\infty$ e $\{a_k\}_{k=1}^\infty \cdot \{b_k\}_{k=1}^\infty = \{a_k b_k\}_{k=1}^\infty$. Sia $S = \{\{a_k\}_{k=1}^\infty \in R : \text{per ogni } \epsilon \in \mathbf{Q}_{>0} \text{ esiste un indice } k \text{ tale che } |a_i - a_j| < \epsilon \text{ per ogni } i, j > k\}$. Sia $I = \{\{a_k\}_{k=1}^\infty \in R : \text{per ogni } \epsilon \in \mathbf{Q}_{>0} \text{ esiste un indice } k \text{ tale che } |a_i| < \epsilon \text{ per ogni } i > k\}$.
 - (a) Dimostrare che R è un anello commutativo.
 - (b) Dimostrare che S è un sottoanello di R .
 - (c) Dimostrare che I è un ideale di S .
 - (d) Chi è l'anello quoziente S/I ?