Algebra 1 (Schoof) $\quad$ 1^o esonero $\quad$ 25 novembre 2016, ore 11:00–13:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali*. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Determinare l'ordine della permutazione $(1\,4\,2\,6)(5\,7\,3)(2\,1\,5)$ nel gruppo simmetrico S_7.

2. Determinare tutte le soluzioni $x \in \mathbf{Z}$ con $1 \leq x \leq 100$ del sistema di congruenze

$$\begin{cases} 3x \equiv 6 \pmod{24}, \\ 6x \equiv 4 \pmod{20}. \end{cases}$$

3. Sia G un gruppo. Due elementi $x, y \in G$ si dicono coniugati se esiste un elemento $g \in G$ con $gxg^{-1} = y$.
   (a) Dimostrare che "essere coniugati" è una relazione di equivalenza.
   (b) Se G è il gruppo simmetrico S_3, quante classi di equivalenza ci sono?

4. Sia G un gruppo e siano H, H' due sottogruppi normali di G con la proprietà che G/H e G/H' sono abeliani. Dimostrare che $G/(H \cap H')$ è abeliano.

5. Sia G un gruppo con la proprietà che $G/Z(G)$ è ciclico. Dimostrare che G è abeliano.

6. Sia G un gruppo e sia H il sottogruppo di G generato dagli elementi di G che hanno ordine finito.
   (a) Dimostrare che H è un sottogruppo normale di G.
   (b) Dimostrare che l'unico elemento del gruppo G/H che ha ordine finito, è l'elemento neutro.

Soluzioni.

1. La permutazione è uguale al prodotto del 5-ciclo $(1\,7\,3\,5\,6)$ e della trasposizione disgiunta $(2\,4)$. Il suo ordine è quindi uguale a $\mathrm{mcm}(2, 5) = 10$.
2. La prima congruenza è equivalente alla congruenza $x \equiv 2 \pmod 8$ e la seconda è equivalente a $x \equiv 4 \pmod{10}$. Le soluzioni in $\mathbf{Z}$ sono i numeri $x \equiv 34 \pmod{40}$. Solo 34 e 74 stanno nell'intervallo $[1, 100]$.
3. Si tratta di una relazione di equivalenza. In S_3 ci sono tre classi di equivalenza. Le trasposizioni formano una classe, i due 3-cicli formano una classe e l'elemento neutro è una classe.
4. Questo è l'esercizio 5 del foglio 7.
5. Questo è l'esercizio 8 del foglio 7.
6. Il fatto che per ogni $g, h \in G$ gli elementi g e hgh^{-1} hanno lo stesso ordine, implica che H è un sottogruppo normale. Sia gH un elemento di G/H di ordine m. Allora, l'elemento g^m sta in H ed ha ordine finito. Ne segue che anche g stesso ha ordine finito e quindi $gH = H$.