Algebra 1 (Schoof) 4^o appello 22 settembre 2017, ore 15:00–17:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Scrivere il polinomio $X_1^3 + X_2^3 + \ldots + X_n^3$ come polinomio nei polinomi simmetrici elementari $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathbf{Z}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$
2. Sia G un gruppo e siano H, H' due sottogruppi normali di G con la proprietà che G/H e G/H' sono abeliani. Dimostrare che $G/(H \cap H')$ è abeliano.
3. Quanti omomorfismi dal gruppo alternante A_4 al gruppo diedrale D_4 ci sono?
4. (a) Esibire un elemento del gruppo alternante A_7 di ordine 6.
   (b) Esibire un elemento di A_7 di ordine più grande possibile.
5. Un elemento x di un anello R si dice *nilpotente* se $x^n = 0$ per un $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$. Dimostrare che gli elementi nilpotenti di un anello commutativo R formano un ideale.
6. Sia $I \subset \mathbf{Z}[X]$ l'ideale generato da 2 e da X^2 e sia $J \subset \mathbf{Z}[X]$ l'ideale generato da 4 e da X.
   (a) Determinare le cardinalità degli anelli quoziente $\mathbf{Z}[X]/I$ e $\mathbf{Z}[X]/J$.
   (b) Determinare la cardinalità dell'anello quoziente $\mathbf{Z}[X]/IJ$.

Soluzioni.

1. Sia ha che $X_1^3 + X_2^3 + \ldots + X_n^3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3$.
2. Questo è l'esercizio 5 del foglio 7.
3. Poiché $\#A_4 = 12$ non è divisibile per la cardinalità di D_4, gli omomorfismi $f : A_4 \longrightarrow D_4$ non possono essere suriettivi. Ne segue che l'immagine di f ha ≤ 4 elementi ed è quindi abeliano. Questo implica che f fattorizza via il quoziente $A_4/[A_4, A_4]$ di ordine 3. Poiché 3 non divide $\#D_4$, l'immagine di f è banale ed f è per forza l'omomorfismo banale.
4. (a) Per esempio, l'elemento $(1\,2\,3)(4\,5)(6\,7)$ ha ordine 6.
   (b) I 7-cicli hanno ordine massimale, vale a dire 7. Infatti, ogni elemento di A_7 è prodotto di al più tre cicli disgiunti. Poiché i 2-cicli sono dispari, l'unica possibilità per un prodotto di *tre* cicli disgiunti è, a meno di coniugio, l'elemento di ordine 6 indicato prima. Prodotti di *due* cicli disgiunti sono pari se e solo se i due cicli hanno la stessa parità. A meno di coniugio ci sono solo le possibilità $(1\,2)(3\,4)$, $(1\,2\,3\,4)(5\,6)$ e $(1\,2\,3)(4\,5\,6)$ di ordine 2, 4 e 3 rispettivamente. Concludiamo che i 7-cicli hanno ordine massimale.
5. Questo è l'esercizio 10 del foglio 13.
6. Entrambi gli anelli $\mathbf{Z}[X]/I$ e $\mathbf{Z}[X]/J$ hanno ordine 4. L'ideale IJ è generato dagli elementi X^3, $2X$ e 8. L'anello $\mathbf{Z}[X]/IJ$ ha quindi $2 \times 2 \times 8 = 32$ elementi.