Algebra 1 (Schoof) 3^o appello 11 luglio 2017, ore 10:00–12:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Siano I, J ideali di un anello commutativo A. Dimostrare che se $I + J = A$, allora $IJ = I \cap J$.
2. (a) Sia $\mathbf{R}^{*2}$ il sottogruppo $\{x^2 : x \in \mathbf{R}^*\}$ dei quadrati di $\mathbf{R}^*$. Dimostrare che il gruppo quoziente $\mathbf{R}^*/\mathbf{R}^{*2}$ è isomorfo a $\mathbf{Z}_2$.
   (b) Sia $\mathbf{Q}^{*2}$ il sottogruppo $\{x^2 : x \in \mathbf{Q}^*\}$ dei quadrati di $\mathbf{Q}^*$. Dimostrare che il quoziente $\mathbf{Q}^*/\mathbf{Q}^{*2}$ è un gruppo infinito.
3. Dimostrare che l'ideale (X, Y) dell'anello $\mathbf{R}[X, Y]$ non è principale.
4. Consideriamo il gruppo simmetrico S_9.
   (a) Determinare l'ordine della permutazione $(2\,1\,3\,4\,5\,9)(5\,1\,3\,4\,6\,7\,8)$.
   (b) Esibire un elemento di S_9 di ordine più grande possibile.
5. Sia $f : G \longrightarrow H$ un omomorfismo di gruppi. È sempre vero che f manda il centro di G nel centro di H? Dimostrarlo o darne un controesempio.
6. Sia $I \subset \mathbf{Z}[X]$ l'ideale generato da 2 e da X^2.
   (a) Determinare la cardinalità dell'anello quoziente $\mathbf{Z}[X]/I$.
   (b) Determinare la cardinalità dell'anello quoziente $\mathbf{Z}[X]/I^2$.

Soluzioni.

1. Esercizio 5 del foglio 10.
2. Esercizio 2 del foglio 8.
3. Supponiamo per assurdo che (X, Y) sia principale. Sia $f \in \mathbf{R}[X, Y]$ un generatore. Visto come elemento di $\mathbf{R}[X][Y]$, il fatto che f divide il polinomio 'costante' $X \in \mathbf{R}[X]$ implica che anche f è 'costante' nel senso che f sta in $\mathbf{R}[X]$. Scambiando X e Y vediamo che per la stessa ragione f sta in $\mathbf{R}[Y]$. Questo implica che f sta in $\mathbf{R}[X] \cap \mathbf{R}[Y]$ ed è quindi costante nel sense che appartiene ad $\mathbf{R}$. Ma questo è impossibile, perché l'ideale (X, Y) né è zero né è $\mathbf{R}[X, Y]$.
4. La permutazione è uguale a $(3\,5)(1\,4\,6\,7\,8\,9\,2)$ ed ha ordine $2 \cdot 7 = 14$. Un elemento di ordine massimale è $(1\,2\,3\,4)(5\,6\,7\,8\,9)$ di ordine $4 \cdot 5 = 20$.
5. È falso. Per esempio, l'omomorfismo $\mathbf{Z} \longrightarrow S_3$ che manda $k \in \mathbf{Z}$ in $(1\,2)^k \in S_3$ non porta il centro di $\mathbf{Z}$ (cioè $\mathbf{Z}$ stesso) nel centro di S_3 (cioè il sottogruppo banale).
6. (a) Ogni classe di $\mathbf{Z}[X]/I$ ha un rappresentante unico della forma $aX + b$ con $a, b \in \{0, 1\}$. L'anello quoziente $\mathbf{Z}[X]/I$ ha quindi $2 \cdot 2 = 4$ elementi.
   Per (b) osserviamo che $I^2 = (4, 2X^2, X^4)$. Ogni classe di $\mathbf{Z}[X]/I^2$ ha un rappresentante unico della forma $aX^3 + bX^2 + cX + d$ con $a, b \in \{0, 1\}$ e con $c, d \in \{0, 1, 2, 3\}$. L'anello $\mathbf{Z}[X]/I^2$ ha quindi $4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ elementi.