Algebra 1 (Schoof) 2^o appello 28 febbraio 2017, ore 10:00–12:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia $H \subset \mathbf{Z}_{31}^*$ il sottogruppo generato dagli elementi $\overline{2}$ e $\overline{5}$. Determinare la cardinalità del gruppo quoziente $\mathbf{Z}_{31}^*/H$.
2. Sia G il gruppo moltiplicativo $\mathbf{C}^*$ e sia $S = \{z \in \mathbf{C}^* : |z| = 1\}$.
   (a) Dimostrare che S è un sottogruppo di G.
   (b) Dimostrare che il gruppo G/S è isomorfo al gruppo additivo $\mathbf{R}$.
3. Sia G un gruppo e sia $H \subset G$ il sottogruppo generato dai quadrati, cioè da tutti gli elementi g^2 con $g \in G$.
   (a) Dimostrare che H è un sottogruppo normale di G.
   (b) Sia $x \in G/H$ un elemento diverso dall'elemento neutro. Determinare l'ordine di x.
4. Sia p un numero primo e sia $I \subset \mathbf{Z}_p[X, Y]$ l'ideale generato da X e Y. Determinare la cardinalità dell'anello quoziente $\mathbf{Z}_p[X, Y]/I^2$.
5. Scrivere il polinomio $(X^2+1)(Y^2+1)(Z^2+1)$ come polinomio nei polinomi simmetrici elementari $s_1, s_2, s_3 \in \mathbf{Z}[X, Y, Z]$.
6. Un elemento x di un anello R si dice *idempotente* se $x^2 = x$.
   (a) Determinare gli elementi idempotenti degli anelli $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.
   (b) Quanti omomorfismi di anelli ci sono da $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ a $\mathbf{Z}$?

Soluzioni.

1. L'ordine di $\overline{2}$ è 5 e l'ordine di $\overline{5}$ è 3. La cardinalità del sottogruppo H è quindi divisibile per 15. L'ordine di ogni prodotto di potenze di $\overline{2}$ e $\overline{5}$ divide 15. Questo implica che $H \neq \mathbf{Z}_{31}^*$, perchè non contiene l'elemento $-\overline{1}$ di ordine 2. La cardinalità di H è quindi 15 e $\#(\mathbf{Z}_{31}^*/H) = 2$.
2. Questo è l'esercizio 12 del foglio 7.
3. Per ogni $h, g \in G$ l'elemento hg^2h^{-1} è uguale a $(hgh^{-1})^2$ ed è quindi un quadrato. Se $x \in G$ è un prodotto di quadrati, anche hxh^{-1} è quindi un prodotto di quadrati. Questo implica che H è normale in G. Per la parte (b), se $x \in G$ e $\overline{x} \in G/H$ non è l'elemento neutro, allora l'ordine di $\overline{x}$ è 2. Questo segue dal fatto che $x^2 \in H$.
4. L'ideale I^2 è generato da X^2, XY e Y^2. Ogni classe laterale di $\mathbf{Z}_p[X, Y]/I^2$ ha quindi un unico rappresentante della forma $aY + bX + c$ con $a, b, c \in \mathbf{Z}_p$. Ne segue che la cardinalità di $\mathbf{Z}_p[X, Y]/I^2$ è uguale a p^3.
5. Questo è l'esercizio 8 del foglio 13.
6. (a) Ogni elemento idempotente è uno zero del polinomio $X^2 - X$. Poichè $\mathbf{Z}$ è un dominio, $X^2 - X$ ha solo i due zeri 0 e 1. Invece in $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ci sono quattro zeri $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ e $(1, 1)$. Per la parte (b) osserviamo che ogni omomorfismo di anelli $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ è determinato da $a = f(0, 1)$ e $b = f(1, 0)$. Ogni $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ manda elementi idempotenti in elementi idempotenti. Abbiamo quindi che $a, b \in \{0, 1\}$. L'elemento uno di $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ è $(1, 1)$. Abbiamo quindi che $1 = f(1, 1) = f(0, 1) + f(1, 0) = a + b$. Quindi, rimangono solo due possibilità: $a = 0$ e $b = 1$ oppure $a = 1$ e $b = 0$. Si tratta in effetti di due omomorfismi di anelli: le due proiezioni $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ date da $(n, m) \mapsto n$ e $(m, n) \mapsto m$.