COGNOME .... *NOME* ....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia G un gruppo e sia $N \subset G$ un sottogruppo normale di cardinalità 2. Dimostrare che N è contenuto nel centro $Z(G)$ di G.
2. Quanti omomorfismi dal gruppo simmetrico S_3 al gruppo ciclico $\mathbf{Z}_6$ ci sono?
3. Sia $H \subset \mathbf{Z}_{19}^*$ il sottogruppo generato da $\overline{7}$.
   (a) Determinare la cardinalità del gruppo quoziente $\mathbf{Z}_{19}^*/H$.
   (b) Determinare l'ordine dell'elemento $\overline{5}H$ in $\mathbf{Z}_{19}^*/H$.
4. Sia $I \subset \mathbf{Z}[X]$ l'ideale generato da X^2+1 e X^2-1. Determinare la cardinalità dell'anello quoziente $\mathbf{Z}[X]/I$.
5. *L'annullatore* $\mathrm{Ann}(I)$ di un ideale I di un anello A (commutativo con 1) è l'insieme $\{a \in A : ax = 0 \text{ per ogni } x \in I\}$.
   (a) Dimostrare che $\mathrm{Ann}(I)$ è un ideale di A.
   (b) Per $A = \mathbf{Z}_{100}$ e $I \subset A$ l'ideale generato da $\overline{15}$, enumerare gli elementi di $\mathrm{Ann}(I)$.
6. Sia $J \subset \mathbf{Z}[X, Y]$ l'ideale generato da $XY - 1$. Quanti omomorfismi dall'anello $\mathbf{Z}[X, Y]/J$ all'anello $\mathbf{Z}_6$ ci sono?

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 7 del foglio 7.
2. Sia $f : S_3 \longrightarrow \mathbf{Z}_6$ un omomorfismo. Poichè $\mathbf{Z}_6$ è abeliano, il sottogruppo $A_3 = [S_3, S_3]$ è contenuto nel nucleo di f, e l'omomorfismo f si fattorizza quindi via un omomorfismo $\tilde{f} : S_3/A_3 \longrightarrow \mathbf{Z}_6$. Il gruppo S_3/A_3 è isomorfo a $\mathbf{Z}_2$. Dal fatto che l'unico elemento di ordine 2 in $\mathbf{Z}_6$ è $\overline{3}$, segue che ci sono due omomorfismi $\tilde{f}$ e quindi anche due omomorfismi f: quello banale e l'omomorfismo che manda le permutazioni pari in $\overline{0}$ e quelle dispari in $\overline{3}$.
3. Poiché $7^3 \equiv 1 \pmod{19}$, si ha che $H = \{\overline{1}, \overline{7}, \overline{11}\}$ e che $\mathbf{Z}_{19}^*/H$ ha $(19-1)/3 = 6$ elementi. Poiché $5^3 \equiv 11 \pmod{19}$, l'ordine di $\overline{5}H$ è 3.
4. Questo è l'esercizio 8 del foglio 14.
5. La parte (a) segue dalla definizione di ideale. Per (b) osserviamo che $\mathrm{Ann}(I) = \{\overline{x} \in \mathbf{Z}_{100} : \overline{15}\,\overline{x} = \overline{0}\}$. Si tratta quindi dell'insieme degli interi $\{x \in \mathbf{Z} : 15x \text{ è divisibile per } 100\}$ presi modulo 100. Ora, si ha che $15x \equiv 0 \pmod{100}$ se e solo se $x \equiv 0 \pmod{20}$. Gli elementi dell'ideale $I \subset \mathbf{Z}_{100}$ sono quindi $\overline{0}, \overline{20}, \overline{40}, \overline{60}$ e $\overline{80}$.
6. Sia $A = \mathbf{Z}[X, Y]/J$ e sia $\phi : A \longrightarrow \mathbf{Z}_6$ un omomorfismo di anelli. Allora ϕ è determinato dagli elementi $\phi(X)$ e $\phi(Y)$ di $\mathbf{Z}_6$. Dal fatto che $XY = 1$ in A, segue che $\phi(X)\phi(Y) = \overline{1}$ in $\mathbf{Z}_6$. In particolare, $\phi(X)$ e $\phi(Y)$ devono essere invertibili. Poiché $\mathbf{Z}_6^* = \{\overline{1}, -\overline{1}\}$, questo implica che $\phi(X) = \phi(Y) = \overline{1}$ oppure $\phi(X) = \phi(Y) = -\overline{1}$. Infatti, l'applicazione $\phi : A \longrightarrow \mathbf{Z}_6$ data da $\phi(f) = f(1, 1) \pmod 6$ per ogni $f \in A$ e l'applicazione data da $\phi(f) = f(-1, -1) \pmod 6$ per ogni $f \in A$, sono omomorfismi ben definiti. Ce ne sono quindi due.