1. Sia G un gruppo abeliano di cardinalità n. Dimostrare che per ogni divisore $m > 0$ di n, il gruppo G ammette un sottogruppo di cardinalità m.

2. (a) Dimostrare che ogni gruppo di cardinalità 255 è ciclico.
   (b) Dimostrare che ogni gruppo di cardinalità 4225 è abeliano.

3. Sia G un gruppo di cardinalità 56. Dimostrare che G ammette un 2-sottogruppo di Sylow normale oppure un 7-sottogruppo di Sylow normale. (Sugg. Se i 7-sottogruppi di Sylow non sono normali, determinare la cardinalità del complemento dell'unione dei 7-sottogruppi di Sylow).

4. In questo esercizio dimostriamo che gruppi G di cardinalità 120 non possono essere semplici. Supponiamo quindi per assurdo che $\#G = 120$ e che gli unici sottogruppi normali di G siano $\{1\}$ e G stesso.
   (a) Dimostrare che G possiede sei 5-sottogruppi di Sylow.
   (b) Il gruppo G agisce tramite coniugio sull'insieme dei 5-sottogruppi di Sylow. Dimostrare che l'omomorfismo associato $G \longrightarrow S_6$ è iniettivo e che l'immagine è contenuta in A_6.
   (c) Dimostrare che A_6 non ha sottogruppi di indice 3 (sfruttare la semplicità di A_6).
   (d) Dedurre una contraddizione e concludere che G non può esistere.

5. Sia G un gruppo e sia $D = [G, G]$ il suo sottogruppo dei commutatori. Sia $f : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(D)$ la mappa data da $x \mapsto \sigma_x$ dove $\sigma_x(h) = xhx^{-1}$ per ogni $h \in D$.
   (a) Dimostrare che $f(D)$ è contenuto nel sottogruppo $\mathrm{Aut}(D)'$ dei commutatori di $\mathrm{Aut}(D)$.
   (b) Dimostrare che $\mathrm{Inn}(D) \subset \mathrm{Aut}(D)'$.
   (c) Dimostrare che il gruppo simmetrico S_3 non può essere sottogruppo dei commutatori di nessun gruppo.
   (d) Dimostrare che per $n \geq 3$ il gruppo diedrale D_n non può essere sottogruppo dei commutatori di nessun gruppo.

6. Sia G un gruppo finito e supponiamo che il 2-sottogruppo di Sylow di G sia ciclico.
   (a) Calcolare il segno della permutazione $G \longrightarrow G$ indotta dalla moltiplicazione a sinistra per un generatore di un 2-gruppo di Sylow.
   (b) Dimostare che G ammette un sottogruppo di indice 2 (e quindi G non è semplice).
   (c) Dimostrare che gli elementi di G di ordine dispari formano un sottogruppo caratteristico di G.

7. Sia $n \geq 1$ e sia φ la funzione di Eulero.
   (a) Per $n = 77, 91$ e 345 dimostrare che ogni gruppo di ordine n è ciclico.
   (b) Provare che se ogni gruppo di ordine n è ciclico, allora si ha che $\mathrm{mcd}(n, \varphi(n)) = 1$.
   (c) Se $\mathrm{mcd}(n, \varphi(n)) = 1$ allora si ha che $\mathrm{mcd}(m, \varphi(m)) = 1$ per ogni divisore m di n.
   (d)*Dimostrare il viceversa di (b). (Sugg: se n non è primo, allora G ammette un sottogruppo normale diverso da $\{1\}$ e da G stesso e procedere per induzione).