1. Sia p un numero primo e sia q un divisore primo di $p-1$. Sia

$$G = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{Z}_p \text{ con } b^q = 1 \},$$

sia $H \subset G$ il sottogruppo delle matrici con $a = 0$ e sia $N \subset G$ il sottogruppo delle matrici con $b = 1$.
(a) Dimostrare che N è un sottogruppo normale di G.
(b) Dimostrare che G è isomorfo al prodotto semidiretto $N \rtimes H$.

2. Siano p e q due numeri primi. Dimostrare che ogni gruppo G di ordine pq ammette un sottogruppo normale diverso da G e da $\{1\}$.

3. Sia ϕ l'unico omomorfismo suriettivo da $\mathbf{Z}_4$ ad $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}_3)$. Sia B il prodotto semidiretto $\mathbf{Z}_3 \rtimes \mathbf{Z}_4$ associato a ϕ.
(a) Determinare gli elementi di ordine 2 di B.
(b) Dimostrare che B non è isomorfo né al gruppo diedrale D_6 né al gruppo alternante A_4.

4. Sia $G = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_3)$. Quanti elementi ha G? Decidere se il 2-sottogruppo di Sylow di G è isomorfo al gruppo diedrale D_4 oppure al gruppo dei quaternioni Q.

5. Sia G un gruppo di ordine 33.
(a) Dimostrare che i sottogruppi di Sylow di G sono normali.
(b) Dimostrare che $G \cong \mathbf{Z}_{33}$. (Sugg. usare l'esercizio 2.5)

6. Sia G un gruppo di ordine 45.
(a) Dimostrare che i sottogruppi di Sylow di G sono normali.
(b) Dimostrare che G è abeliano. (Sugg. usare l'esercizio 2.8)

7. Sia G un gruppo di ordine 12.
(a) Dimostrare che G ammette un 2-sottogruppo di Sylow normale oppure un 3-sottogruppo di Sylow normale.
(b) Esibire esempi di gruppi di ordine 12 con 2-sottogruppi di Sylow non normali (resp. 3-sottogruppi di Sylow non normali).

8. Sia G un gruppo e sia $\phi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$ la mappa che manda $g \in G$ nell'automorfismo ϕ_g dato da $\phi_g(x) = gxg^{-1}$ per ogni $x \in G$. Sorprendentemente, il prodotto semidiretto $G \rtimes G$ (rispetto a ϕ) è *isomorfo* al prodotto cartesiano $G \times G$. Esibire un isomorfismo.

9. Un gruppo G si dice *semplice* se gli unici sottogruppi normali di G sono G e $\{1\}$. Dimostrare che nessun gruppo di ordine n è semplice nei seguenti casi:
(a) $n = 200$; (b) $n = 4p$ con $p \geq 5$ primo; (c) $n = 36$; (d) $n = 72$;
(Sugg. usare la teoria di Sylow e l'esercizio 2.9.)