

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia $n \geq 2$. Sia $H \subset S_n$ un sottogruppo che ha la proprietà che l'azione di H su $\{1, 2, \dots, n\}$ ha un'unica orbita. Dimostrare che n divide $\#H$.
2. Sia $G = \text{GL}_2(\mathbf{F}_5)$ il gruppo delle matrici 2×2 invertibili con coefficienti in $\mathbf{F}_5$ e sia D il suo sottogruppo delle matrici scalari.
 - (a) Dimostrare che D è un sottogruppo normale di G .
 - (b) Sia $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ in G . Determinare l'ordine dell'elemento σD nel gruppo quoziente G/D .
3. Sia A_4 il sottogruppo delle permutazioni pari nel gruppo simmetrico S_4 . Quanti omomorfismi non iniettivi $A_4 \rightarrow S_4$ ci sono?
4. Sia I l'ideale di $\mathbf{Z}_3[X, Y]$ generato da X e Y . Determinare la cardinalità dell'anello $\mathbf{Z}_3[X, Y]/I^2$.
5. Dimostrare che per ogni anello R (commutativo con 1) lo spazio $\text{Spec}(R)$, dotato dalla topologia di Zariski, è compatto.
6. Sia k l'anello quoziente $\mathbf{Z}[i]/(7)$ e sia $k' = \mathbf{F}_7(\sqrt{3})$. Dimostrare che k e k' sono campi finiti di cardinalità 49 ed esibire un isomorfismo $k \cong k'$.

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 10 (a) del foglio 2.
2. Il sottogruppo D è un sottogruppo normale di G perché è contenuto nel centro di G . Poiché $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, l'ordine è uguale a 3.
3. Sia $f : A_4 \rightarrow S_4$ un omomorfismo non iniettivo. Allora $N = \ker f$ è un sottogruppo normale di A_4 e f si fattorizza via un omomorfismo iniettivo $\bar{f} : A_4/N \hookrightarrow S_4$.
Se l'indice $[A_4 : N] > 4$, il fatto che $N \neq \{1\}$ implica che $[A_4 : N] = 6$ e quindi $\#N = 2$. Questo implica che N è contenuto nel centro di A_4 il quale è banale. Contraddizione.
Si ha quindi che $[A_4 : N] \leq 4$ e quindi che A_4/N è abeliano. Questo implica che $[A_4, A_4] \subset N$. Poiché $A_4/[A_4, A_4]$ ha cardinalità 3, ci sono quindi due possibilità: $N = A_4$, e $\bar{f}$ e quindi anche f , è banale. Oppure $N = [A_4, A_4]$ e A_4/N è ciclico di cardinalità 3. Siccome A_4 contiene 8 elementi di ordine 3, ci sono otto possibilità per $\bar{f}$ e quindi anche per f . Concludiamo che ci sono 9 omomorfismi non iniettivi.
4. Si ha che $I^2 = (X^2, XY, Y^2)$. Ogni classe di $\mathbf{Z}_3[X, Y]/I^2$ contiene quindi un unico polinomio di grado < 2 . Poiché i polinomi di grado < 2 hanno la forma $a + bX + cY$ per $a, b, c \in \mathbf{F}_3$, l'anello $\mathbf{Z}_3[X, Y]/I^2$ ha $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ elementi.
5. Questo è l'esercizio 6 del foglio 8.
6. Poiché -1 e 3 non sono quadrati modulo 7, i polinomi $X^2 + 1$ e $X^2 - 3$ sono irriducibili in $\mathbf{F}_7[X]$ e gli anelli quoziente $k = \mathbf{Z}[i]/(7) = \mathbf{F}_7[X]/(X^2 + 1)$ e $k' = \mathbf{F}_7[X]/(X^2 - 3)$ sono campi. Sia k che k' ha $7^2 = 49$ elementi. Poiché il quadrato di $2i \in k$ è $-4 = 3$, l'omomorfismo $\phi : \mathbf{F}_7[X] \rightarrow k$ che manda X in $2i$ è ben definito ed ha nucleo $(X^2 + 3)$. Per il teorema di isomorfismo ϕ induce quindi un isomorfismo $k \cong k'$.