

1. Sia  $(\mathcal{P}, \wedge, \vee, \neg)$  l'algebra di Boole del calcolo proposizionale. Qua scriviamo  $\neg A$  per la negazione dell'affermazione  $A$ . Se l'affermazione  $A$  implica l'affermazione  $B$ , scriviamo  $A \Rightarrow B$ . Considerare la seguente relazione:

$$A \text{ "}\leq\text{" } B \text{ se } A \Rightarrow B.$$

- (a) Verificare che  $A \text{ "}\leq\text{" } B$  è logicamente equivalente alla relazione  $A \wedge B \Leftrightarrow A$  ed alla relazione  $A \vee B \Leftrightarrow B$ .  
 (b) Dati  $A, B \in \mathcal{P}$ , chi sono  $\sup\{A, B\}$  ed  $\inf\{A, B\}$ ?
2. Siano  $x$  un elemento e siano  $X, Y$  e  $Z$  insiemi. Siano dati gli enunciati

$$A: \text{ "}\{x \in X\text{"}, \quad B: \text{ "}\{x \in Y\text{"}, \quad C: \text{ "}\{x \in Z\text{"}.$$

- (a) Combinando  $A, B, C$  mediante gli operatori logici  $\wedge, \vee, \neg$  esprimere i seguenti fatti:  
 $x \notin X$ ;  $x \in Y \cup Z$ ;  $x \notin Y \cup Z$ ;  $x \in X \cap Y \cap Z$ ;  $x \in X \setminus Y \cap Z$ ;  
 $x \in X \cap (Y \cup Z)$ ;  $x \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ ;  $x \in (X \setminus Y) \cap (X \cap Z)$ .
- (b) Cosa dicono su  $x$  gli enunciati  
 $\neg A \wedge B$ ;  $A \wedge (B \vee \neg C)$ ;  $\neg(A \vee (B \wedge C))$ ;  $A \vee \neg(B \wedge C)$ );?  
 Illustrare i vari casi con dei disegni.
3. Per ognuno dei seguenti enunciati: scrivere cosa vuol dire "a parole", determinare se è vero o falso e scriverne la negazione (non ci devono essere negazioni davanti ai quantificatori).
- (a)  $\exists x \in \mathbf{R} : ((x^2 < 10) \wedge (|3 - x| > 2))$ ;  
 (b)  $\forall x \in \mathbf{R} : ((x \neq 4) \Rightarrow (x - 5 > 1))$ ;  
 (c)  $\forall x \in \mathbf{R} \exists y \in \mathbf{R} : (x + y = 0)$ ;  
 (d)  $\exists x \in \mathbf{R} \forall y \in \mathbf{R} : (xy = 0)$ ;

4. Sia dato l'enunciato

$$\text{Siano } A, B, C \text{ insiemi. } \forall A, B, C : (A \cap B \neq \emptyset) \wedge (B \cap C \neq \emptyset) \Rightarrow (A \cap C \neq \emptyset).$$

- (a) Determinare se è vero o falso.  
 (b) Scrivere la sua negazione.  
 (c) Se è vero dimostrarlo; se è falso dimostrare che è vera la sua negazione, ed esibire un controesempio esplicito.
5. È vero che dati tre insiemi  $A, B, C$  vale l'implicazione  
 $(A \cup C = B \cup C) \wedge (A \cap C = B \cap C) \Rightarrow A = B$ ?  
 Dimostrarlo o esibire un controesempio.