

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

Ci sono quattro versioni leggermente diverse. Eccone una.

1. Dire se l'elemento $\overline{11}$ dell'anello \mathbf{Z}_{91} è invertibile o meno. Nel caso affermativo, calcolarne l'inverso.
2. Determinare tutti i numeri $n \in \mathbf{Z}$ con $0 < n < 300$ che soddisfano

$$\begin{cases} n \equiv 7 \pmod{9}, \\ n \equiv 13 \pmod{33}. \end{cases}$$

4. Sia $B = \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^*$. Definiamo una relazione R su A come segue: per due elementi (u, v) e (u', v') in B si ha che $(u, v)R(u', v')$ quando $uu' > 0$ e $vv' > 0$.
 - (a) Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.
 - (b) Quante classi di equivalenza ci sono?
3. Calcolare il resto della divisione di 123^{455} per 7.
5. Sia E il seguente polinomio Booleano in tre variabili x, y e z :

$$E = xyz \vee y\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}.$$

- (a) Scrivere E come somma di tutti gli implicanti primi.
 - (b) Determinare una forma minimale di E .
6. Sia dato l'enunciato

“per ogni tre insiemi A, B e C si ha che $(A \cap B \neq \emptyset) \wedge (B \cap C \neq \emptyset) \Rightarrow (A \cap C \neq \emptyset)$ ”.

 - (a) Determinare se è vero o falso. Spiegare la risposta.
 - (b) Scrivere la sua negazione. La risposta non può contenere il simbolo “ \neg ”. (Per esempio, invece di $\neg(X \cap Y = \emptyset)$, va scritto $X \cap Y \neq \emptyset$)

Soluzioni.

1. Con l'algoritmo euclideo si trova che $\overline{11} \cdot \overline{58} = \overline{1}$ in \mathbf{Z}_{91} . In particolare, $\overline{11}$ è invertibile.
2. Le soluzioni del sistema sono gli interi $n \equiv 79 \pmod{99}$. Gli interi cercati sono quindi 79, 178 e 277.
3. Per il Teorema di Fermat si ha $a^6 \equiv 1 \pmod{7}$ per ogni intero a non divisibile per 7. Ne segue che $123^{456} \equiv 4^{456} \equiv 4^0 \equiv 1 \pmod{7}$. Il resto è quindi uguale a 1.
4. Ci sono quattro classi di equivalenza. Una classe per ogni scelta dei segni delle coordinate.
5. Questo è l'esercizio 2 del foglio 11.
6. Questo è l'esercizio 4 del foglio 12.