

1. Calcolare la tabella dei numeri primi  $p < 200$ .
2. Fattorizzare come prodotto di numeri primi i seguenti numeri: 100, 10!, 101, 1001, 10001 e il coefficiente binomiale  $\binom{50}{25}$ .
3. (Numeri di Mersenne). Per ogni numero naturale  $n$ , si definisce l'ennesimo numero di Mersenne come  $M_n = 2^n - 1$ .
  - (a) Fattorizzare  $M_n$  per  $1 \leq n \leq 12$ ;
  - (b) Dimostrare: se  $M_n$  è primo, allora  $n$  è primo;
  - (c) Far vedere che il viceversa di (b) non vale;
 (si veda <http://mathworld.wolfram.com/MersenneNumber.html>)
4. (Numeri di Fermat) Per ogni numero naturale  $n$ , si definisce l'ennesimo numero di Fermat come  $F_n = 2^{2^n} + 1$ ;
  - (a) Dimostrare: se  $2^m + 1$  è primo, allora  $m$  è potenza di 2;
  - (b) Far vedere che  $F_n$  è primo per  $1 \leq n \leq 4$ ;
 (si veda <http://mathworld.wolfram.com/FermatNumber.html>)
5. Per ogni  $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ , calcolare  $(n-1)!$  modulo  $n$ .
6. (Pollard  $\rho$ ) Sia  $p$  un numero primo e  $f : \mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{Z}_p$  la funzione data da  $\bar{x} \mapsto \overline{x^2 + 1}$ . Per  $p = 41$  e 61 disegnare il seguente grafo diretto: i vertici sono le classi  $\bar{x} \in \mathbf{Z}_p$ . Esiste una freccia da  $\bar{x}$  verso  $\bar{y}$  se e soltanto se  $f(\bar{x}) = \bar{y}$ .
7. Sia  $n$  un numero naturale di tre cifre in base 10. Supponiamo che  $n \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $n \equiv 2 \pmod{11}$  e  $n \equiv 3 \pmod{13}$ . Determinare  $n$ .
8. Sia  $\mathbf{Z}_n$  l'anello degli interi modulo  $n$  e sia  $\mathbf{Z}_n^*$  il gruppo degli elementi invertibili di  $\mathbf{Z}_n$ .
  - (a) Scrivere la tavola pitagorica di  $\mathbf{Z}_n^*$  per  $n = 5, 8, \text{ e } 12$ .
  - (b) Dimostrare che si ha  $\bar{x}^2 = \bar{1}$  per ogni  $\bar{x} \in \mathbf{Z}_{24}^*$ .
  - (c) Determinare gli interi positivi  $n$  che hanno la proprietà che  $\bar{x}^2 = \bar{1}$  per ogni  $\bar{x} \in \mathbf{Z}_n^*$ .
9. Si consideri la funzione  $\varphi$  di Eulero. Calcolare  $\varphi(n)$  per i seguenti numeri: 100, 10!, 101, 1001, 10001.
10. Sia  $n$  un numero naturale. Dimostrare che  $4^n + n^4$  può solo essere primo quando  $n = 1$ .
11. Dimostrare: se  $p$  è primo e  $p^2 + 8$  è primo, allora  $p^3 + 4$  è primo.  
*PER I SEGUENTI ESERCIZI È UTILE UN COMPUTER.*
12. Sia  $n = 7538415671$ . Decidere se le classi di congruenza modulo  $n$  dei seguenti numeri stanno in  $\mathbf{Z}_n^*$  o meno: 56893415, 3674509, 92367458.
13. Implementare l'algoritmo  $\rho$  di Pollard e usarlo per
  - (a) fattorizzare i numeri di Mersenne  $M_n$  per  $1 \leq n \leq 60$ ;
  - (b) fattorizzare i numeri di Fermat  $F_n$ , per  $1 \leq n \leq 8$ .
14. Calcolare le ultime 10 cifre decimali della 123456789-esima potenza di 123456789. (in altre parole, calcolare  $123456789^{123456789}$  modulo  $10^{10}$ ).
15. I numeri di Fibonacci  $\Phi_n$  sono definiti ricorsivamente come segue:  $\Phi_1 = 1$ ,  $\Phi_2 = 1$  e  $\Phi_{n+1} = \Phi_n + \Phi_{n-1}$  per  $n \geq 1$ . I primi numeri di Fibonacci sono
 
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$
  - (a) Sia  $w = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  e sia  $\bar{w} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Dimostrare che  $\sqrt{5}\Phi_n = w^n - \bar{w}^n$  per ogni  $n \geq 1$ .
  - (b) Calcolare le ultime 10 cifre decimali di  $\Phi_{1000000}$ . (in altre parole, calcolare  $\Phi_{1000000}$  modulo  $10^{10}$ ).