

1. Sia  $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  l'applicazione data da  $g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ -2x - 2y + 2z \end{pmatrix}$ . Calcolare una base per  $\ker(g)$  e una base per  $\text{im}(g)$ .

2. Sia  $A$  la matrice  $n \times n$  data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Sia  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  data dalla moltiplicazione per  $A$ . Sia  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  la base canonica di  $\mathbf{R}^n$ . Far vedere che  $f(\mathbf{e}_1) = 0$  e che

$$f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{i-1}; \quad \text{per } i = 2, 3, \dots, n.$$

- (b) Per  $m > 0$ , sia  $f^m$  l'applicazione  $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{m \text{ volte}}$  e sia  $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{m \text{ volte}}$ . Per ogni  $m > 0$ , calcolare la matrice  $A^m$  e determinare il nucleo e l'immagine di  $f^m$ .

3. Siano  $n, m \geq 1$  e

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} & b_m \end{pmatrix}.$$

- (a) Dimostrare che il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{n1}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{1m}x_1 + \cdots + a_{nm}x_n = b_m \end{cases}$$

ammette una soluzione se e solo se  $\mathbf{b}$  è contenuto nello span delle colonne di  $A$ .

- (b) (Rouché-Capelli) Dimostrare che il sistema di equazioni ammette una soluzione se e solo se il rango di  $A'$  è uguale al rango di  $A$ .

4. Sia  $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$  e sia  $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V : x_2 = x_4 \right\}$ .

- (a) Osservare che  $W \subset V$  (!) e determinare la dimensione di  $W$ .  
 (b) Esibire un complemento  $W'$  di  $W$  in  $\mathbf{R}^4$ .  
 (c) Dimostrare che per ogni complemento  $W'$  si ha che  $\dim(V \cap W') = 1$ .