1. Sia C la circonferenza in $\mathbf{R}^2$ di equazione $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$ e sia P il punto $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Determinare equazioni cartesiane delle due rette tangenti a C e passanti per P . (Suggerimento: fare un disegno)

2. Sia S la sfera di equazione $x_1^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 + 1)^2 = 4$ e sia r la retta di equazione cartesiana:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4 = 0 \\ -x_1 + x_3 + 1 = 0 \end{cases}$$

- (a) Determinare i punti d'intersezione P e Q di S con r .
 (b) Scrivere l'equazione del piano π_1 tangente alla sfera in P .
 (c) Scrivere l'equazione del piano π_2 tangente alla sfera in Q .
 (d) Scrivere un'equazione parametrica della retta r intersezione di π_1 e π_2 .
3. Sia S la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ e sia r la retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (\lambda \in \mathbf{R}).$$

- (a) Dimostrare che $S \cap r = \emptyset$.
 (b) Siano π_1 e π_2 i due piani tangenti a S che contengono r . Determinare i punti $S \cap \pi_1$ e $S \cap \pi_2$.
 (c) Determinare equazioni cartesiane di π_1 e di π_2 .

4. Sia $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x - y + 2z = 0 \right\}$, e siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^3$.

- (a) Dimostrare che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ formano una base di V .
 (b) Sia $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Verificare che $\mathbf{w} \in V$ e determinare le coordinate di $\mathbf{w}$ rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. In altre parole, trovare $\xi_1, \xi_2 \in \mathbf{R}$ tali che $\mathbf{w} = \xi_1 \mathbf{v}_1 + \xi_2 \mathbf{v}_2$.

5. Siano

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3;$$

- (a) Far vedere che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sono vettori indipendenti.
 (b) Esibire un complemento in $\mathbf{R}^3$ di $\text{Span}\{\mathbf{v}_1\}$ e di $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.
6. Esibire un complemento del sottospazio $W \subset \mathbf{R}^4$ dato da

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$