1. Siano
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3;$$
   (a) Far vedere che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sono vettori indipendenti.
   (b) Esibire un terzo vettore $\mathbf{v}_3$ tale che $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.
   (c) Esibire un terzo vettore $\mathbf{v}_3'$ tale che $\mathbf{R}^3 \neq \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3'\}$.

2. Scrivere i seguenti sottospazi W come $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r)$ per dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$.
   (a) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \} \subset \mathbf{R}^5;$
   (b) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + 2x_3 = 0 \} \subset \mathbf{R}^4;$
   (c) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \} \subset \mathbf{R}^3;$

3. (a) Esibire basi per gli spazi vettoriali W dell'Esercizio 2.
   (b) Determinare le dimensioni degli spazi vettoriali W dell'Esercizio 2.

4. Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^5$ dato da
$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \},$$
   e sia W' il sottospazio di $\mathbf{R}^5$ dato da
$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \}.$$
   Determinare la dimensione di $W \cap W'$.

5. Sia V uno spazio vettoriale sie $W \subset V$ un suo sottospazio. Dimostrare che
   (a) $\dim W \leq \dim V$;
   (b) $V = W$ se e solo se $\dim W = \dim V$.