1. Quali V sono spazi vettoriali?
   (a) $V = \mathbf{R}^2$ con la solita somma fra vettori e con prodotto definito da
   $$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \text{ ed ogni } \lambda \in \mathbf{R}$$
   (b) $V = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ con addizione "$\oplus$" e moltiplicazione "$\otimes$" definite da
   $$x \oplus y = xy; \qquad \text{per ogni } x, y \in V,$$
   $$\lambda \otimes x = x^\lambda; \qquad \text{per ogni } x \in V,\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

2. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ e controllare se sono sottospazi lineari:
   (a) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 2x_2\} \subset \mathbf{R}^2$, (c) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 2\} \subset \mathbf{R}^2$,
   (b) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 > 0\} \subset \mathbf{R}^2$, (d) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = x_2 = 0\} \subset \mathbf{R}^2$.

3. Decidere se sono sottospazi o meno i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$.
   (a) $W = \{\begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : 0 < t < 1\}$, (c) $W = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$,
   (b) $W = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : |x-2y+z| = 0\}$, (d) $W = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 0\}$.

4. Sia V spazio vettoriale e sia $\mathbf{v} \in V$ un vettore. Dimostrare che il sottoinsieme $W = \{t\mathbf{v} : t \in \mathbf{R}\}$ è sottospazio di V.

5. Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ dato da
   $$W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 & = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 & = 0 \\ 4x_1 + 3x_3 + 2x_4 & = 0 \end{cases} \}.$$
   Decidere se $W = \{\mathbf{0}\}$ o meno.

6. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathbf{0} \in V$ il vettore zero.
   (a) Dimostrare che se un vettore $\mathbf{v} \in V$ ha la proprietà che $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w}$ per ogni $\mathbf{w} \in V$, allora $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
   (b) Dimostrare che per ogni $\mathbf{v} \in V$ esiste un *unico* vettore opposto.
   (c) Sia $\mathbf{v} \in V$. Dimostrare che $(-1) \cdot \mathbf{v}$ è il vettore opposto di $\mathbf{v}$.

7. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathbf{0} \in V$ il vettore zero.
   (a) Dimostrare che $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$.
   (b) Siano $\mathbf{v} \in V$ e $\lambda \in \mathbf{R}$. Dimostrare che se $\lambda \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, allora $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ oppure $\lambda = 0$.