

1. Calcolare

$$(a) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(b) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(c) \det \begin{pmatrix} 100 & 73 \\ 137 & 100 \end{pmatrix};$$

$$(d) \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (\varphi \in \mathbf{R}).$$

2. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare $\det(A)$ e $\det(B)$.

(b) Calcolare $\det(AB)$, $\det(BA)$ e $\det(A^{-1})$.

(c) Calcolare $\det(A+B)$.

3. Siano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3.$$

(a) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

(b) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $2\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

(c) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

4. Per ogni $n \geq 1$ calcolare il determinante della seguente matrice $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Sia D la matrice 10×10

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 9 & 10 \\ 11 & 12 & \cdots & 19 & 20 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 81 & 82 & \cdots & 89 & 90 \\ 91 & 92 & \cdots & 99 & 100 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare il determinante di D .

(b) Calcolare il rango di D .

6. Sia $f: \mathbf{R}^{10} \rightarrow \mathbf{R}^{10}$ l'applicazione lineare data dalla moltiplicazione per la matrice D dell'esercizio 5.

(a) Determinare una base per l'immagine di f .

(b) Determinare una base per il nucleo di f .