1. Per le seguenti matrici decidere se sono invertibili o meno e, in caso, calcolarne la matrice inversa:

(a) $\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Sia $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data dalla moltiplicazione per $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Far vedere che i vettori $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1$ formano una base per $\mathbf{R}^3$.

   (b) Calcolare la matrice rappresentativa di g rispetto alla base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ in dominio e codominio.

3. Siano

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   vettori in $\mathbf{R}^3$.

   (a) Far vedere che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ formano una base per $\mathbf{R}^3$.

   Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare che permuta i vettori $\mathbf{v}_i$:

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2, \quad f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3, \quad f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1.$$

   (b) Calcolare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ (in dominio e codominio).

   (c) Calcolare la matrice rappresentative di f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

   (d) Calcolare la matrice rappresentativa di f^3 rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

4. Sia $V \subset \mathbf{R}^3$ il sottospazio dato da

$$V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$$

   e sia $h : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data da $h \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

   (a) Dimostrare che $h(\mathbf{x}) \in V$ per ogni $\mathbf{x} \in V$.

   Sia $\tilde{h} : V \longrightarrow V$ la *restrizione* di h a V. Si ha quindi che $\tilde{h}(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in V$.

   (b) Esibire una base per V.

   (c) Calcolare la matrice rappresentativa dell'applicazione $\tilde{h}$ rispetto a questa base.